Mathematik	***Name:***				***Klausur Nr.6***
K1	***Punkte:***	***/30 Note:***		***Schnitt:***	***20.12.18***

Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)

Aufgabe 1: [2P] Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x)=(2x+1)\cdot e^{-2x}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Lösungsvorschlag 1: Mit der Produkt- und der Kettenregel folgt

$$f'(x)=2\cdot e^{-2x}+(2x+1)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=\left(2-2\cdot(2x+1)\right)\cdot e^{-2x}=-4x\cdot e^{-2x}$$

Notiz: Beachtet bitte, dass $(2x+1)\cdot(-2)\neq(2x+1)-2$

Aufgabe 2: [2P] Berechnen Sie das Integral $\int_1^e\left(\frac{4}{x}-5\right)dx$.

Lösungsvorschlag 2:

$$\int_1^e\left(\frac{4}{x}-5\right)dx=\left[4\ln(x)-5x\right]_1^e=4\ln e-5e-\left(4\ln 1-5\right)=4-5e-0+5=9-5e$$

Notiz: $\left(\ln(4x)\right)'=\frac{1}{4x}\cdot innereAbl=\frac{1}{4x}\cdot 4=\frac{1}{x}$

Also unterscheiden sich ln(4x) und ln(x) nur durch eine Konstante. Das ist klar, denn $\ln(4x)=\ln(4)+\ln(x)$

Merke: Es gilt $4\ln(x)=\ln(x^4)$

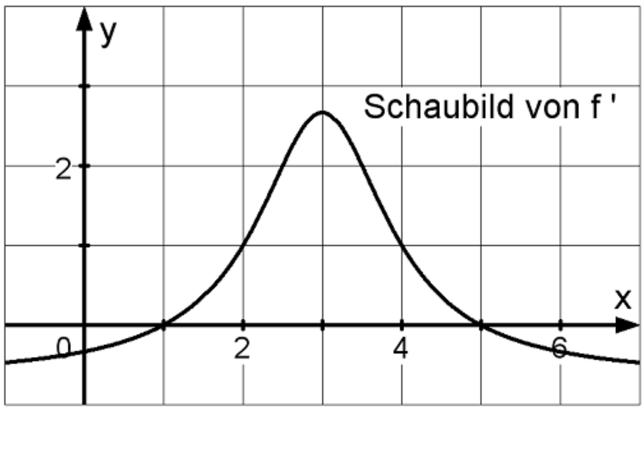
Aufgabe 3: [3P] Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(x)\cdot\left(\sin(x)+3\right)=0$.

Lösungsvorschlag 3: Einer der beiden Faktoren muss 0 sein.

1) sin(x)=0 damit gilt x = 0, pi oder 2pi
2) sin(x)=3 hat keine Lösung

Merke: Ist ein Produkt Null, so ist einer der Faktoren Null. Also nicht ausmultiplizieren! Meist ist eine Subsitution auch nicht nötig.

Aufgabe 4: [4P] Die Abbildung rechts zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f.



a) wo besitzt die Funktion f im Bereich $0\leq x\leq 6$
   - Maximumstellen
   - Wendestellen
   - Stellen, an denen das Schaubild von f Tangenten parallel zur ersten Winkelhalbierend hat?

   Begründen Sie Ihre Aussagen

b) Es gilt f(1) = 4, bestimmen sie näherungsweise f(3)

Lösungsvorschlag 4:

Zu a) Extremstellen von f sind x=1 und x=5. An diesen Stellen ist die erste Ableitung 0 (notwendige Bedingung).
Zur Stelle x = 1: Links davon ist die Steigung negativ, rechts davon positiv, Dies ist also ein Minimum.
Zur Stelle x = 5: Links davon ist die Steigung postiv, rechts davon negativ. Dies ist also ein Maximum.
Also gibt es genau ein Maximum bei x = 5
Unterschiede notwendig und hinreichend: Für ein Maximum ist es notwendig, dass f'(x)=0 ist. Aber aus f'(x)=0 folgt nicht, dass x ein Max ist, es könnte auch ein Min oder ein Sattelpunkt sein.

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle ist, dass f'(x) ein Extremum ist, d.h., dass f''(x)=0 ist. Dies ist nur in x = 3 der Fall. Allerdings folgt daraus allein noch nicht, dass x = 3 eine Wendestelle ist. f'(x) muss ein Extremum sein (kein Sattelpunkt!). Das ist hier der Fall.

Eine Stelle, in der der die Tangente parallek zur ersten Winkelhalbierenden ist, ist eine Stelle, in der die Steigung m = 1 ist. Das sind die Stellen x = 2 und x = 4.

Zu b) Es gilt $f(3)-f(1)=[f(x)]_1^3=\int_1^3 f'(x)dx \approx 2$. also ist $\int_1^3 f'(x)dx \approx 2$ also gilt $f(3) \approx f(1)+2=6$

Aufgabe 5: [4P] Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
   (1) Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
   (2) Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

Lösungsvorschlag 5:

Zu a) Für das Umdrehen der ersten Karte hat Peter 9 Möglichkeiten, für das Umdrehen der zweiten noch 8 Möglichkeiten.
Wir können einen einfachen Baum zeichnen:

$P\left(\overline{AA}\right)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$ P(kA,kA)= 5/9*4/8=5/18

Beachte, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten in der zweiten Ebene um 1 verringert, da die aufgedeckten Karten offen bleiben (Ziehen ohne Zurücklegen)
Der Baum für das zweite Ereignis ist

$$P(B)=P(D)\cdot P(A)+P(A)\cdot P(D)=\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$$

Zu b) Da von den 9 Karten nur 5 kein Ass sind, muss Laura spätestens beim 6. Mal ein Ass aufdecken. Sie kann selbstverständlich auch beim ersten Mal bereits ein Ass aufdecken.Damit kann X die Werte X = 1, 2, … 6 annehmen.

$$P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{13}{18}$$

Mathematik	*Name:*			*Klausur Nr.6*
K1	*Punkte:*	*/30 Note:*	*Schnitt:*	*20.12.18*

Wahlteil (etwa 40 min) – **Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.**

Aufgabe 6: Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte A(0|-4|1) und B(1|-2|0) sowie eine Ebenenschar $E_k: x+(k-1)y+2kz=-2k+1$ wobei k eine reelle Zahl ist.

a) [3P] Berechnen Sie den Schnittpunkt von g mit der Ebene E_0.
Untersuchen Sie, ob A und B auf der gleichen Seite von E_0 liegen.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels von g und der Ebene E_0.

b) [4P] Zeigen Sie, dass die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in jeder Ebene E_k liegt.

Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes C auf der Geraden h, der mit den Punkten A und B ein gleichschenkliges Dreieck mit der Seite BC als Basis bildet.

c) [3P] Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks ABC mit C(-1|-2|0). Bestimmen Sie die Gerade durch A, die senkrecht zum Dreieck ABC ist. Bestimmen Sie einen Punkt S, der zusammen mit dem Dreieck ABC eine Pyramide vom Volumen 20 bildet.

d) [3P] Berechnen Sie den Wert von k, für den die Ebene E_k parallel zur y-Achse ist. Untersuchen Sie, ob es eine Ebene der Schar gibt, welche die x-Achse orthogonal schneidet.

Lösungsvorschlag 6: (vgl. Abibuch S. 208, Lösung S. 209)

Zu A6a) Die Gerade g ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1-0 \\ -2+4 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Ebene E_0 ist $E_0: x+(0-1)y+2\cdot 0\cdot z=-2\cdot 0+1$ oder $E_0: x-y=1$

Sei S(a/b/c) ein Schnittpunkt, dann gilt (nach Einsetzen der drei Gleichungen der Gerade in die Ebenengleichung): $t-(-4+2t)=1$ oder $t=3$

Damit ist S(3/-4+6/1-3) = S(3/2/-2)

Orientierte Abstände: Hessesche Normalenform der Ebene $E_0: \dfrac{x-y-1}{\sqrt{2}}=0$

Orientierter Abstand von A: $d_A = \dfrac{0+4-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 1{,}5\cdot\sqrt{2}$

Orientierter Abstand von B: $d_b = \dfrac{1+2-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Da beide dasselbe Vorzeichen haben, liegen sie auf derselben Seite der Ebene (dort wohin die Normale der Ebene zeigt).

(Zweite Lösungsvariante, siehe Abibuch S. 209 – bitte ansehen, merken! S ist von a weiter weg als B! Wenn t für den Schnittpunkt kleiner als 1 wäre, wären beide auf verschiedenen Seiten.)

Der Schnittwinkel von g und E berechnet sich wie folgt:

$$\sin(\varphi)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1}}=\frac{|1-2|}{\sqrt{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$. Damit ist $\varphi=16{,}86°$

Zu A6b)

Eine Gerade h liegt in der Ebene E, wenn mindestens zwei Punkte von h in E liegen. Oder wenn ein Punkt in E liegt und die Normale der Ebene senkrecht zum Richtungsvektor von g ist.

Wir können auch zeigen, dass ein beliebiger Punkt (Stichwort: „laufender Punkt“ der Gerade) der Gerade h in E liegt. Dies ist wohl die schnellste Variante, allerdings muss man mit Buchstaben rechnen.

Der beliebige Geradenpunkt von h ist P(-3+2t / -4+2t / 1-t). Wir zeigen, er liegt für jedes k auf der Ebene $E_k: x+(k-1)y+2kz=-2k+1$.

Setzen wir den beliebigen Geradenpunkt in die linke Seite der Ebenengleichung ein, erhalten wir die rechte Seite der Ebenegleichung:

$$-3+2t+(k-1)(-4+2t)+2k(1-t)=-3+2t-4k+2kt+4-2t+2k-2kt=1-2k$$

Sei C der Geradenpunkt auf h, d.h. C(-3+2t / -4+2t / 1-t), der von A und B denselben Abstand hat, dann gilt $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ oder $\left|\begin{pmatrix}-3+2t-0\\-4+2t+4\\1-t-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0-1\\-4+2\\1-0\end{pmatrix}\right|$

oder $\left|\begin{pmatrix}-3+2t\\2t\\-t\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right|$ oder nach dem Quadrieren

$(2t-3)^2+4t^2+t^2=1^2+2^2+1^2$. Wir wenden die binomische Formel an und fassen zusammen $4t^2-12t+9+4t^2+t^2=6$ oder $9t^2-12t+3=0$ oder $3t^2-4t+1=0$ also

Setzt man in dem beliebigen Punkt t = 1, erhäalt man: C(-3+2 / -4+2 / 0) oder C(-1 / -2 / 0)

Zu A6c)

Die Fläche ist die halbe Länge des Vektors

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1-0\\-2+4\\0-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1-0\\-2+4\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

Damit ist die Fläche $A = \frac{1}{2}\sqrt{0+4+16} = \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{5}$

Die Gerade j durch A senkrecht zum Dreieck ist gegeben durch den Ortsvektor von A und den Richtungsvektor $\vec{n}$, also $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Liegt S(0 / -4+r / 1+2r) auf j, so ist der Abstand zur Ebene ABC die Länge von $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 2r \end{pmatrix}$, also $h = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{r^2 + 4r^2} = r\sqrt{5}$. Das Volumen der Pyramide ist dann $V = \frac{1}{3}\sqrt{5}\cdot r\sqrt{5} = \frac{5}{3}r$

Damit V = 20 ist, muss gelten $\frac{5}{3}r = 20$ oder r = 12

Zu A6d) Sei die Ebene E_k parallel zur y-Achse, dann ist der Normalenvektor der Ebene E_k senkrecht zum Richtungvektor der Gerade y-Achse.

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 2k \end{pmatrix}$ der Richtungvektor ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Da sie senkrecht sind gilt $\vec{n}\cdot\vec{u} = k-1 = 0$ oder k = 1. D.h die Ebene E_1 ist parallel zur y-Achse.

Sei die Ebene E_k senkrecht zur x-Achse, dann ist der Normalenvektor der Ebene $E_{k,\text{ d.h.}}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 2k \end{pmatrix}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors der x-Achse, d.h. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit gibt es ein α mit $k-1 = \alpha\cdot 0 = 0$ und $2k = \alpha\cdot 0 = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt k=1, aus der zweiten k=0. Damit gibt es keine Ebene, die senkrecht zur x-Achse ist.

Aufgabe 7: **[4P]** Aus zwei 30 cm breiten Brettern soll eine V-förmige Rinne hergestellt werden. Bei welchem Abstand 2x der oberen Bretterkanten ist das Fassungsvermögen der Rinne am größten (d.h. ist die Querschnittsfläche maximal)

Lösungsvorschlag 7: Die Querschnittsfläche berechnet sich (siehe Skizze) als $A = x\cdot h$. Der Satz des Pythagoras liefert $h = \sqrt{30^2 - x^2}$

Damit ist $A(x) = x\cdot h = x\cdot\sqrt{900-x^2}$. Die Ableitung ist

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{900 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{900 - x^2}} = \frac{900 - x^2 - x^2}{\sqrt{900 - x^2}} = \frac{900 - 2x^2}{\sqrt{900 - x^2}}$$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum ist $A'(x) = 0$ oder $\frac{900 - 2x^2}{\sqrt{900 - x^2}} = 0$ oder $900 - 2x^2 = 0$ oder $x_{1/2} = \pm\sqrt{450} = \pm 15\sqrt{2} \approx 21,2$

An den Rändern, d.h. wenn x gegen 0 geht, geht die Fläche gegen 0, bei x gegen 60 geht sie ebenfalls gegen 0. Damit ist $x_1 = 15\sqrt{2}$ ein Maximum

Der Abstand der oberen Brettkanten ist beim Maximum also $30\sqrt{2} = 42,4$

Quellen:

A4, Sj 12 KA7
A5, Abi2013 P8
A6, Buch S. 32 Nr. 15
A7, Abibuch S.208