Mathematik	***Name:***			***Lösung Nr.5***
K2	***Punkte:***	***/30 Note:***	***Schnitt:***	***8.11.18***

Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)

Aufgabe 1: [2P] Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin(x)$

Lösungsvorschlag 1:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x)+\sqrt{x}\cdot\cos(x)$$

Bem.: Denke beim Ableiten immer an die Produktregel (besteht aus zwei Summanden!) und die Kettenregel. Bei dieser Aufgabe benötigen wir die Produktregel.

Ausdrücke wie $\sqrt{x}$ oder $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ werden vor dem Ableiten in Potenzen umgewandelt, d.h. $x^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-1,5}$. Wer will, merkt sich $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 2: [3P] Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x)=\frac{2}{x}-3x$.

Wie lautet die Stammfunktion, die durch den Punkt P(1/1) geht?

Lösungsvorschlag 2:

Jede Stammfunktion ist von der Gestalt $G_c(x)=\int\frac{2}{x}-3x\,dx=2\ln x-\frac{3}{2}x^2+c$

Die Schar $G_c(x)$ heißt Menge aller Stammfunktionen.

Nun ist c so zu bestimmen, dass gilt $G_c(1)=2\ln 1-\frac{3}{2}+c=1$. Da $\ln(1)=0$ ist, muss

$-\frac{3}{2}+c=1$ sein, also $c=2,5$ sein.

Also ist die gesuchte Stammfunktion $G_c(x)=2\ln x-\frac{3}{2}x+2,5$

Aufgabe 3: [3P] Lösen Sie die Gleichung $\ln(x)=2+\frac{15}{\ln(x)}$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

Lösungsvorschlag 3:

Da ln(x) im Zähler und im Nenner steht, erhalten wir eine quadratische Gleichung, wenn wir mit ln(x) multiplizieren.

Wir substituieren $t=\ln(x)$ und multiplizieren die Gleichung mit t.

$t^2=2t+15$ oder $t^2-2t-15=0$ Die Mitternachtsformel liefert:

$$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=5/-3$$

Nun machen wir die Substitution rückgängig:

Mathematik ***Name:*** ***Lösung Nr.5***
K2 ***Punkte: /30 Note:*** ***Schnitt:*** ***8.11.18***

$t=5$: $\ln x = 5 \Rightarrow x = e^5$

$t=-3$: $\ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

Vorsicht: $ln(x) = -3$ ist lösbar, nicht aber $exp(x) = -3$
Das x bei ln(x) kann aber nur positive Werte annehmen (der Definitionsbereich von ln sind nur die positiven Zahlen), das x bei exp(x) kann aber alle Werte annehmen.

Aufgabe 4: [4P] Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E: 4x - 2y + z = 15$$

a) [2P] Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.
b) [2P] Beschreiben Sie mit Worten, wie sie den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene bestimmen.

Lösungsvorschlag 4:

Zu a) Sei S(a/b/c) ein Schnittpunkt, dann gilt: es gibt ein t mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $4a - 2b + c = 15$. Jetzt haben wir vier Gleichungen für die vier unbekannten Zahlen t, x und y! Setzen wir die ersten drei Gleichungen in die vierte ein, erhalten wir eine Gleichung mit t. $4(1+2t) - 2(1-t) + 3t = 15$ oder $4 + 8t - 2 + 2t + 3t = 15$ oder $13t = 13$ oder t = 1. Damit ergeben die ersten drei Gleichungen $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt muss also S(3/0/3) sein. Dieser Punkt ist auch ein Schnittpunkt, wie man durch Einsetzen leicht überprüft.

Zu b) Wir berechnen die Normale $\vec{n_E}$ der Ebene E, falls wir sie nicht der Ebenenform entnehmen können, z.B. weil die Ebene in Koordinatenform gegeben ist. Ebenso lesen wir den Richtungsvektor der Gerade g ab, nämlich $\vec{u_g}$. Nun berechnen wir $\frac{|\vec{n_E} \cdot \vec{u_g}|}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u_g}|}$. Für den Schnittwinkel α der Ebene E und der Geraden g gilt $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n_E} \cdot \vec{u_g}|}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u_g}|}$. Also ist $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{n_E} \cdot \vec{u_g}|}{|\vec{n_E}| \cdot |\vec{u_g}|}\right)$

Wahlteil (etwa 40 min) – Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.

Aufgabe 5: In einer Urne befinden sich viele rote und schwarze Kugeln. Jemand vermutet, dass der Anteil der schwarzen Kugeln höchstens 40% beträgt. Er zieht 20 Kugeln zufällig, um zu testen, ob vielleicht doch mehr als 40% schwarze Kugeln in der Urne sind.

a) [2P] Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternative, geben Sie die Parameter an.

b) [2P] Berechnen Sie den Erwartungswert des Tests und ihre Standardabweichung.

c) [3P] Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 Kugeln schwarz sind? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 8 Kugeln, bzw. mehr als 12 Kugeln schwarz sind?

d) [3P] Bestimmen Sie den genauen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 5%. Wie viele schwarze Kugeln muss man mindestens ziehen, damit man die Nullhypothese signifikant (auf dem Niveau 5%) ablehnen muss?

d) [1P] Sind mehr als 40% schwarze Kugeln in der Urne, wenn man die Nullhypothese signifikant ablehnen kann? Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag 5:

Zu a) Die Nullhypothese ist p(schwarze Kugel) = p(Treffer) $\leq$ 40%
Die Alternative der Nullhypothese ist p(schwarze Kugel) $> 0{,}40$
Damit liegt ein rechtsseitiger Signifikanztest vor. Der Ablehnungsbereich der Nullhypothese beginnt bei der kleinsten Trefferzahl k, für die $P(X \geq k) < \alpha = 0{,}05$ ist.
(Würden die Kugeln nicht zurückgelegt, änderte sich die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel, wenn man eine Kugel gezogen hat.)

Zu b) p(Treffer) = 0,4 und n=20.
Für den Erwartungswert gilt: $\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}4 = 8$
Die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 2{,}19$

Zu c) $P(X=10) = \binom{20}{10} \cdot 0{,}4^{10} \cdot (1-0{,}4)^{20-10} = 11{,}7\%$

Anmerkung: Die mathematische Darstellung der Bernoulliverteilung muss (im Abi auch) angegeben werden. Die Befehle, die man beim WTR benutzt, sind nicht erforderlich.

$$P(X<8) = P(x \leq 7) = \sum_{i=0}^{7} \binom{20}{i} \cdot 0{,}4^{i} \cdot (1-0{,}4)^{20-i} = 41{,}6\%$$

$$P(X>12) = 1 - P(x \leq 12) = 1 - \sum_{i=0}^{12} \binom{20}{i} \cdot 0{,}4^{i} \cdot (1-0{,}4)^{20-i} = 2{,}10\%$$

Zu d) Eine Schätzung der unteren Grenze des Ablehnungsbereichs erhalten wir mit
$g = \mu + 2\sigma = 8 + 2 \cdot 2{,}19 = 12{,}38$
Die genaue untere Grenze des Ablehnungsbereichs für das Signifikanzniveau 5% ist der kleinste Wert k, für den gilt $P(X \geq k) \leq 0{,}05 = 5\%$ Da wir $P(X \geq k)$ nicht mit dem GLK berechnen können, müssen wir zum Gegenereignis übergehen.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $P(X \geq k) \leq 0{,}05\%$ ist wegen
$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}05\%$ oder $1 - 0{,}05\% \leq P(X \leq k-1)$ äquivalent zu
$0{,}95\% \leq P(X \leq k-1)$ .Wir suchen also die kleinste Zahl k mit $P(X \geq k) \leq 0{,}05\%$

oder mit $P(X \le k-1) \ge 0{,}95$

k-1	$P(X \le k-1)$
11	0,943
12	0,979

Also ist $k-1=12$ oder $k=13$.

Also spricht bis einschließlich $k=12$ nichts gegen die Nullhypothese, d.h. $\{0{,}1,\ldots 12\}$ ist der Annahmebereich. Erst wenn man bei 20 Ziehungen mindestens 13 schwarze Kugeln zieht, kann man die Aussage, dass in der Urne höchstens 40% schwarze Kugeln sind, auf dem 5%-Signifikanzniveau ablehnen. Der Ablehnungsbereich ist also {13, 14, …20}. D.h. bei höchstens 5% der Experimente zieht man bei $p=0{,}4$ mindestens 13 schwarze Kugeln.

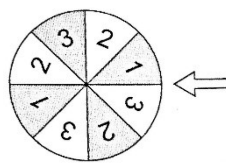
Zu g) Nein, die Nullhypothese kann bei jedem Ergebnis der Wirklichkeit entsprechen. Wenn man eine Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau 5% ablehnt, heißt das nur, dass aufgrund der Annahme der Nullhypothese das Ergebnis (oder ein schlechteres) in weniger als 5% der Stichproben vorkommt. Mit anderen Worten, in 5% aller der Untersuchungsfälle lehnt man die Nullhypothese fälschlicherweise ab. Wenn man genauer rechnen will, gilt oben in 2,1% der Fälle wird die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt.

Dies ist ein wichtiger Punkt, wenn man Signifikanzergebnisse ablehnt. Im Durchschnitt liefert jedes 20. Testergebnis mit der Aussage „man kann die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau signifikant ablehnen“, ein falsches Ergebnis. Dies nennt man Fehler 1. Art.

Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass man ein Ergebnis nicht ablehnt, obwohl die Alternativhypothese richtig ist, kann man nicht feststellen. Das hängt ja davon ab, wie groß der wirkliche Wert ist, aber den kennt man ja nicht. Diesen (nicht näher bestimmbaren Fehler, nennt man Fehler 2. Art.

Aufgabe 6: Bei dem abgebildeten Glücksrad sind alle acht Sektoren gleich groß.

a) [4P] Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden zwei Ereignisse:
A: Die Zahl w wird höchstens zweimal gezogen
B: Die Summe der angezeigten Zahlen ist höchstens 5 (Mit welchen Zahlen kann man 4 bzw. 5 erreichen?)



b) [3P] Bestimmen Sie, wie oft man das Glücksrad höchstens drehen darf, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 50% mehr als zweimal die Zahl 1 auftritt.

Lösungsvorschlag 6:

Zu a) Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind $p(1)=\frac{1}{4}$, $p(2)=\frac{3}{8}$ und $p(3)=\frac{3}{8}$

Zu A): P(A) erhält man mit der Binomialverteilung, wobei $n = 4, p = 0{,}375$ ist.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^i \left(\frac{5}{8}\right)^{4-i} = 0{,}848$$

zu B: Wenn man viermal die 1 dreht, erhält man 4. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

Dreht man 3-mal die 1 und 1-mal die 2, erhält man 5. Alle anderen Varianten ergeben eine Zahlensumme größer als 5. Da die 2 an vier verschiedenen Stellen stehen kann,

gilt $P(B) \ = \frac{1}{256} + 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{256} + \frac{3}{128} = \frac{7}{256} = 0{,}0273$

Zu b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Eins gezogen wird ist $p = \frac{1}{4}$. Mit X bezeichnen wir die Berechnung der Anzahl der Einser, wenn man viermal dreht. X ist binomialverteilt.

Es ist jetzt n so zu bestimmen, dass $P(X > 2) \le 0{,}5$ bei diesem n ist. Da man dies nicht direkt mit einer Formel berechnen kann, benutzt man

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) \le 0{,}5$ oder $P(X \le 2) \ge 0{,}5$

Gesucht ist also das größte n, so dass $P(X \le 2) \ge 0{,}5$

Durch Probieren erhält man die Tabelle

n	$P(X \le 2)$
10	0,526
11	0,455

Damit ist die gesuchte Zahl n=10.

Mathematik   ***Name:***   ***Lösung Nr.5***
K2   ***Punkte:***   ***/30 Note:***   ***Schnitt:***   ***8.11.18***

Aufgabe 7: [4P] Alfons wirft Münzen, so dass sie möglichst nahe an der Wand zu liegen kommen. Die Münzen prallen dabei oft ab und rollen zurück. Der Abstand X in Meter von der Wand ist eine Zufallsvariable, die man mit der Wahrscheinlichkeitsdichte g über dem Intervall [0|2]

$$g: \; [0\,|\,2] \;\to\; R$$
$$x \;\mapsto\; \frac{5}{32}(x-2)^4$$

bestimmen kann.
Zeigen Sie, dass dies eine Wahrscheinlichkeitsdichte über dem Intervall [0|2] ist.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die die Standardabweichung der Abstandsvariable X.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze weniger als 0,5 m von der Wand entfernt ist?

Lösungsvorschlag 7: $g(x) \geq 0$

Damit g eine Wahrscheinlichkeitsdichte über [0|2] ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: 1) $g(x) \geq 0$ und 2) $\int_0^2 g(x)dx = 1$

Die erste Bedingung gilt trivialerweise. Die zweite Bedingung überprüfen wir einfach durch Nachrechnen.

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 \frac{5}{32}(x-2)^4 dx = \left[\frac{5}{32}\frac{1}{5}(x-2)^5\right]_0^2 = \frac{1}{32}(2-2)^5 - \frac{1}{32}(0-2)^5 = 0 - \frac{1}{32}\left(-32\right) = 1$$

Anmerkung: Selbstverständlich könnten wir das Intergral auch mit dem GTR berechnen, aber das Integral müssen wir auf alle Fälle hinschreiben.

Der Erwartungswert ist $\mu = \int_0^2 xg(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{5}{32}(x-2)^4 dx = \frac{1}{3}$ laut GTR.

Das Quadrat Standardabweichung ist

$$\sigma^2 = \int_0^2 (x-\mu)^2 g(x)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{32}(x-2)^4 dx = \frac{5}{63} = 0{,}0794$$

Damit ist die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{5}{63}} = 0{,}282$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze weniger als 0,5 m von der Wand entfernst ist

beträgt $P(X \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \frac{5}{32}(x-2)^4 dx = \frac{1}{32}\left[(x-2)^5\right]_0^{0{,}5} = \frac{1}{32}\left(-7{,}60+32\right) = 76{,}3\%$

oder einfach das Integral hinschreiben und mit dem GTR berechnen.