Aufgabe 1:[3P] Berechnen Sie das Integral $\int_e^{e^2}\left(\frac{5x}{2\sqrt{x^5}}-\frac{3}{\sqrt{7}\cdot x}\right)dx$.

Lösung 1:

$$\int_e^{e^2}\left(\frac{5x}{2\sqrt{x^5}}-\frac{3}{\sqrt{7}x}\right)dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{5}{2}x^{1-\frac{5}{2}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\ln(x)\right]_e^{e^2}=$$

$$\left[-\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\ln(x)\right]_e^{e^2}=\left(-\frac{5}{\sqrt{e^2}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\ln\left(e^2\right)\right)-\left(-\frac{5}{\sqrt{e}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\ln(e)\right)=$$

$$\left(-\frac{5}{e}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot 2\right)-\left(-\frac{5}{\sqrt{e}}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot 1\right)=-\frac{3}{\sqrt{7}}-5\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-0{,}0594$$

Aufgabe 2:[4P] Gegeben sind die Punkte A(2|4|1), B(0|2|-1), C(4|-2|1) und D(-1|9|0).

Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene E durch die drei Punkte A, B, C.

Überprüfen Sie, ob D auf dieser Ebene E liegt.

Lösung 2: Die Parameterform der Ebene E ist

$$E:\vec{x}=\overrightarrow{0A}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Sei $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ eine Normale. Dann gilt $-2x-2y-2z=0$ und $2x-6y=0$. Für die zweite können wir sofort eine Lösung angeben: $x=3$ und $y=1$. Damit ergibt sich wegen der umgeformten ersten Gleichung: $x+y+z=0\ \ oder\ \ z=-y-x=-4$. Also ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$.

Die Koordinatenform ist also $3x+y-4z=\vec{n}\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=6+4-4=6$. Setzen wir den Punkt D in die linke Seite ein, erhalten wir $3\cdot(-1)+9=6$. Also liegt D auf E. Man kann auch mit der Parameterform überprüfen, ob D auf der Ebene liegt.

$$E:\vec{x}=\overrightarrow{0A}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Falls D auf E liegt, muss es r und s geben mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Die dritte Zeile liefert sofort $r = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Setzen wir dies in die erste Zeile ein, so erhalten wir $-1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 2s$. Also gilt $2s = -1 - 2 + 1 = -2$ oder s = -1.
Nun müssen wir noch überprüfen, ob sich der Wert der linken Seite ergibt, wenn wir r und s in die linke Seite der Vektorgleichung einsetzen. Wie man leicht sieht, ist dies richtig Dazu muss man eigentlich nur noch die zweite Zeile überprüfen – das darf man aber nicht vergessen.
Anmerkung: Wer will kann natürlich die Gleichungen auch mit dem Gaußverfahren lösen, dabei ist aber zu beachten, dass man vor dem Verfahren „den Stützvektor auf die andere Seite bringt". Es sind ja 2 Unbekannte zu bestimmen, d.h. das Verfahren hat drei Spalten nicht vier! Es ist selten hilfreich, einfach ohne Verständnis loszurechnen.

Aufgabe 3: a) [2P] Weisen Sie nach, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene $E: 4x + 0,5y - 2z = 2$ ist.
b) [3P] Bestimmen Sie mit der Hesseschen Normalenform den Abstand der Geraden g (eines Punktes der Geraden g) von der Ebene E.

Lösung 3: Zu a) g ist parallel zu E genau dann, wenn die Normale der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden senkrecht aufeinander stehen.

$$\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0,5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 4 + 1 - 5 = 0.$$

Eine andere Variante ist: Bestimmen Sie die Schnittpunkte. Es gilt: g und E sind parallel, wenn es keine Schnittpunkte gibt, d.h., wenn die Annahme, es gäbe Schnittpunkte zu einem Unsinn führt, z.B. 0=1

Zu b) Die HNF ist $E: \frac{4x + 0,5y - 2z - 2}{\sqrt{4^2 + 0,5^2 + 2^2}} = 0$

Damit ist der Abstand des Punkte P(10/-3/-2) auf g zu E:

$$d = \left| \frac{4 \cdot 10 + 0,5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) - 2}{\sqrt{20,25}} \right| = \left| \frac{40 - 1,5 + 4 - 2}{4,5} \right| = \frac{40,5}{4,5} = 9$$

Aufgabe 4: a) [2P] Beschreiben Sie mit Worten, wie man den Abstand eines Punkts $P(x_p / y_p / z_p)$ von der Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{q}$ bestimmt.

b) [4P] Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(7/14/-8)$ nicht auf der Ebene $E: 4x + 4y - 2z = 10$ liegt. Damit kann man den Punkt P an E spiegeln. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes.
(Tipp: Abstand des Punktes P von E mit der Gerade senkrecht zu E, die Spiegelung kann mit dem Schnittpunkt von g und E bestimmt werden.)

Lösung 4: zu a) 1) Bestimmen Sie die Ebene E durch P, die senkrecht zu g ist.
2) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von E und g.
3) Bestimmen Sie den Abstand von P zu S

Zu b)

P liegt nicht auf der Ebene E, wenn die linke Seite der Koordinatengleichung beim Einsetzen von P nicht 10 ist, wenn man darin die Koordinaten von P einsetzt. Dies gilt hier, denn $4 \cdot 7 + 4 \cdot 14 - 2 \cdot (-8) = 28 + 56 + 16 = 100$.

Wenn man den Punkt P an E spiegeln möchte, so muss man eine Gerade g von P senkrecht zu E zeichnen und den Punkt auf g bestimmen, der von E genau so weit entfernt ist, wie P. Beim Bestimmen des Abstanden von P zu E bestimmen wir genau diese Gerade.

Die Gerade g senkrecht zu E durch P ist: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Sei S(x/y/z) ein Punkt, der auf g und E liegt, so gilt: Es gibt ein r mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und es gilt $4x + 4y - 2z = 10$. Setzen wir die ersten drei Gleichungen in die vierte ein, erhalten wir: $4(7 + 4r) + 4(14 + 4r) - 2(-8 - 2r) = 10$ oder $28 + 16r + 56 + 16r + 16 + 4r = 10$ oder $100 + 36r = 10$. Damit ist $r = -\frac{90}{36} = -\frac{5}{2}$. Setzen wir r in die Geradengleichung ein, erhalten wir den Punkt auf S. Da der gesuchte Spiegelpunkt P' doppelt so weit von P(7/14/-8) entfernt sein muss, bekommen wir ihn, wenn wir das Doppelte von r einsetzen. Der gesuchte Spiegelpunkt P' ist also $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Spiegelpunkt ist also $P'(13/-6/2)$.

Eine Variante: Man auch den Schnittpunkt ausrechnen, also

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} - 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt P' ist nun von S(-3/4/-3) gleich weit entfernt, wie P, aber auf der anderen Seite. Man kommt von P zu P', wenn man doppelt so weit geht, wie von P nach S. Also $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: [3P] Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g. A wird an der Geraden g gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Lösungsvorschlag 5:
Die Bestimmung von A' erfolgt z.B. in folgenden Schritten

1. Aufstellen von E senkrecht zu g durch A. Stützvektor 0A und Normale = Richtungsvektor von g.
2. Schnittpunkt S von E und g bestimmen.
3. Der Ortsvektor von A' ist $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$.