Abkürzungen bei der Korrektur (offizielle Abkürzung fürs Abi:
S: Schreibfehler
R: Rechenfehler
D: Denkfehler – Die Art, wie die Lösung versucht wird, ist nicht brauchbar, also falsch. Es ist dann meist sinnvoll, mit mir zu reden.
Generell sollten sich fast alle mehr um eine klare und erkennbare **Darstellung** kümmern. Es geht nicht nur darum, irgendwelche Formeln aufs Papier zu schreiben, sondern im Abitur wird mathematisches Denken und Modellieren abgefragt. Ihr sollt zeigen, dass ihr die mathematischen Denkverfahren verstanden habt, nicht nur mit Formeln oder Gleichungen umgehen könnt!

Nebenbei: Zwei junge Berliner Studenten haben für 12,5 Mio. ihre Mathe-App Math 42 verkauft. Der Spiegel schreibt: Für Maxim Nitsche geht es darum, frustrierte Schülern an der Schönheit von Mathematik teilhaben zu lassen. „Mathe wird falsch beigebracht", urteilt er. „Es geht doch nicht um blöde Formeln zum Auswendiglernen." Mathematik sei eine Denkweise, um strukturiert an ein Problem heranzugehen. Schritt für Schritt, in einem Kontext und immer unter der Frage: Warum mache ich das.

Aufgabe 1: Leiten Sie ab und vereinfachen Sie gegebenenfalls

a) [2P] $f(x)=\frac{3x^2+5x}{2x^2}$ b) [3P] $f(x)=\sin(x)\cdot\sqrt{3x+x^3}$

Lösungsvorschlag 1:

Zu a) **Variante 1**: Wir formen zuerst f(x) um:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x}{2x^2}=\frac{3x^2}{2x^2}+\frac{5x}{2x^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x^{-1}$$

Damit erhalten wir ganz einfach $f'(x)=-\frac{5}{2}x^{-2}=-\frac{5}{2x^2}$

Variante 2: Natürlich kann man das auch mit der Produktregel ableiten. Auch hierbie formen wir zuerst um: $f(x)=\left(3x^2+5x\right)\left(2x^2\right)^{-1}$ Damit folgt mit der Produktregel und der Kettenregel bei der Ableitung des zweiten Faktors:

$$f'(x)=\left(6x+5\right)\left(2x^2\right)^{-1}+\left(3x^2+5x\right)\left(-1\right)\left(2x^2\right)^{-2}4x=\frac{6x+5}{2x^2}-\frac{\left(3x^2+5x\right)4x}{4x^4}=$$

$$=\frac{\left(6x+5\right)}{2x^2}-\frac{\left(3x+5\right)2\cdot 2x^2}{4x^4}=\frac{6x+5-6x-10}{2x^2}=\frac{-5}{2x^2}=-\frac{5}{2x^2}$$

Variante 3: Günstiger ist es vielleicht, wenn man die 2 vom Nenner nach vorne nimmt: $f(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2+5x\right)x^{-2}$. Jetzt benötigen wir keine Kettenregel!

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(6x+5\right)x^{-2}+\left(3x^2+5x\right)\left(-2x^{-3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(6x+5\right)}{x^2}-\frac{\left(3x^2+5x\right)2}{x^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(6x+5\right)}{x^2}-\frac{\left(6x+10\right)x}{x^3}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{6x+5-6x-10}{x^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-5}{x^2}\right]=-\frac{5}{2x^2}$$

Man sieht doch recht deutlich, dass die erste Variante sicher die einfachste ist, also bitte merken!

Zu b) Zur Ableitung benötigen wir zuerst die Produktregel und dann bei der Ableitung der zweiten Funktion die Kettenregel.

$$f'(x)=\cos(x)\cdot\sqrt{3x+x^3}+\sin(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x+x^3}}\cdot\left(3+3x^2\right)=$$

$$=\cos(x)\cdot\sqrt{3x+x^3}+\sin(x)\cdot\frac{3+3x^2}{2\sqrt{3x+x^3}}$$

Tipp: Wer nicht beide Ableitungen richtig hat (das sind fast alle!), übt das Ableiten ähnlicher Terme. Siehe w2.gzg-fn.de >Mathe K1/K2, 102, 103, 104

Aufgabe 2: [3P] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt x = 0 an die Funktion $f(x)=-0,5x^2-3x-6$

[3P] Bestimmen Sie die Punkte, deren Tangenten durch den Ursprung gehen - die Tangentengleichungen in diesen Punkten müssen nicht angegeben werden.

Lösungsvorschlag 2:

a) Die **Tangente im Punkt P(a/f(a))** an den Graphen der Funktion f(x) ist:
$t(x)=f'(a)\left(x-a\right)+f(a)$.

Wir benötigen die erste Ableitung: $f'(x)=-x-3$

Da wir wissen, dass a=0 ist, gilt $f(a)=f(0)=-6$ und $f'(a)=f'(0)=-2$.

Also ist die Gleichung der Tangente:
$t(x)=-3(x-0)-6=-3x-6$

b) Sei **Q(b/f(b))** der Punkt, dessen Tangente durch (0/0) geht. Die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt ist

$$t(x)=f'(b)\left(x-b\right)+f(b)=(-b-3)\cdot(x-b)-0,5b^2-3b-6=$$
$$-\left(b+3\right)x+b^2+3b-0,5b^2-3b-6=-\left(b+3\right)x+0,5b^2-6$$

Da der Ursprung auf der Tangente liegt, gilt $t(0)=0$ oder $0,5b^2-6=0$ oder $b^2=12$

Damit gibt es zwei mögliche Tangenten, nämlich die durch $b=2\sqrt{3}$ und durch $b=-2\sqrt{3}$

Tipp: Wer nicht beide Tangentenaufgaben richtig hat, liest bitte nochmals w2.gzg-fn.de >Mathe K1/K2, 105

Aufgabe 3: [2P] Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ alle Intervalle, auf denen f streng monoton wachsend ist.

Lösungsvorschlag 3: (siehe Nr. 108 Aufgabe 6)

Es gilt $f'(x)=x^3-4x=x\left(x^2-4\right)$. Gesucht sind die Bereiche, in denen die Funktion f'(x) echt größer oder echt kleiner als Null ist. Wir benötigen dazu die Nullstellen, diese trennen die Bereiche

Sei x eine Nullstelle von f', so gilt $x\left(x^2-4\right)=0$. Damit sind $x=0$, $x=-2$ und $x=2$ Nullstellen.

Die Ableitung ist >0, d.h. die Funktion ist streng monoton steigend, wenn x zwischen -2 und 0 oder größer als 2 ist.

(Sie ist <0, d.h. die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $x<-2$ oder x zwischen 0 und 2 ist.)

Aufgabe 4: [4P] Ein Quader aus Pappe mit quadratischer Grundseite hat das Volumen 4 Liter. Wie groß müssen die Kantenlägen sein, wenn für seine Herstellung möglichst wenig Material verwendet werden soll und der Quader oben offen ist.

Lösungsvorschlag 4: Die Grundseite bezeichnen wir mit x die Höhe mit h.

Die Oberfläche ist $O=x^2+4xh$ das Volumen $V=x^2h$

Die Oberfläche soll minimal sein. Wir benötigen also eine Funktion, die die Oberfläche beschreibt und nur von einer Variablen abhängt. Dazu eliminieren h. Dies gelingt uns mit dem Volumen, das 4 sein soll, d.h. es muss gelten $V=x^2h=4$. Lösen wir diese Gleichung nach h auf, erhalten wir $h=\frac{4}{x^2}$. Dies können wir in O einsetzen und sehen, dass O nun nur von einer Variablen x abhängt: $O=x^2+4x\frac{4}{x^2}=x^2+\frac{16}{x}$.

Wir haben damit eine Funktion

$$O:\quad \textit{Seitenlänge} \to \textit{Volumen}$$
$$x \to x^2+\frac{16}{x}$$

Ihre Ableitung ist $O'(x)=2x-\frac{16}{x^2}$

Wenn ein Maximum vorliegt, muss die Ableitung Null sein, also ist die notwendige Bedingung für ein Extremum: $2x-\frac{16}{x^2}=0$ wir multiplizieren mit dem Hauptnenner: $2x^3-16=0$ oder $x^3=8$. Damit muss x = 2 sein.

Hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt ist O''(2)>0.

Die Ableitung ist $O''(x)=2+\frac{32}{x^3}$. Damit ist $O''(2)=2+\frac{32}{2^3}=2+4=6$^