Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)

Aufgabe 1: [2P] Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f(x)=3x\cdot e^{7x+2}$

Lösungsvorschlag 1: Wir benötigen die Produktregel – die Faktoren sind $3x$ und e^{7x+2} .
Zum ‚Ableiten des zweiten Faktors benötigen wir noch die Kettenregel.

$$f'(x)=3\cdot e^{7x+2}+3x\cdot e^{7x+2}\cdot 7=3\cdot e^{7x+2}\left(1+7x\right)$$

Aufgabe 2: [2P] Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{18}{(2x+1)^4}\,dx$.

Lösungsvorschlag 2: Da der lineare Faktor $2x+1$ im Nenner steht und mit vier potenziert wird (damit ist das Integral kein ln!) müssen wir vor dem Integrieren umformen. Beim Integrieren müssen wir wie immer beachten, dass wir beim Ableiten eine innere Ableitung haben, d.h. wir müssen den Faktor 2 mit $\frac{1}{2}$ kompensieren.

Beachtet, dass $-4+1=-3$ ist.

$$\int_0^1 \frac{18}{(2x+1)^4}\,dx=\int_0^1 18(2x+1)^{-4}\,dx=\left[\frac{18}{-4+1}(2x+1)^{-4+1}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^1=\left[\frac{18}{-3\cdot 2}(2x+1)^{-3}\right]_0^1=$$

$$\left[\frac{-3}{(2x+1)^3}\right]_0^1=\left(\frac{-3}{(2\cdot 1+1)^3}\right)-\left(\frac{-3}{(2\cdot 0+1)^3}\right)=\left(\frac{-3}{3^3}\right)-\left(\frac{-3}{1^3}\right)=-\frac{1}{9}+3=2\frac{8}{9}$$

Aufgabe 3: [3P] Lösen Sie die Gleichung $e^x-2-\frac{15}{e^x}=0$

Lösungsvorschlag 3: (Abi 07, 3)

Wenn wir die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren (hier mit e^x), erhalten wir

$\left(e^x\right)^2-2\cdot e^x-15=0$ (**jeder** Summand wird multipliziert!)

Wir substituieren nun $t=e^x$ und erhalten $t^2-2\cdot t-15=0$. Diese quadratische Gleichung lösen wir mit der Mitternachtsformel

$$t_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=5/-3$$

Resubstitution: $e^x=t=5$ liefert x = ln(5)

$e^x=t=-3$ hat keine Lösung, da e^x stets positiv ist.

***Merke**: Wenn eine Unbekannte im Nenner einer Gleichung auftritt, multiplizieren wir die Gleichung mit dem Hauptnenner. IMMER.*

***Merke**: Wenn wir eine Gleichung mit drei Summanden haben, die wir nicht addieren können, benötigen wir meistens die MNF. Wir bringen also alle drei*

Summanden auf eine Seite. Wenn die Variable in komplexerer Gestalt auftritt, dann versuchen wir eine Substitution – einer der Summanden muss die Variable dann im Quadrat enthalten.

Aufgabe 4: Gegeben sind $E: x_1 + 3x_2 - 4 \cdot x_3 = 1$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) [3P] Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von E und g.
b) [2P] Wie kann man erkennen, dass eine Gerade h keinen Schnittpunkt mit der obigen Ebene E hat – ohne ihn zu berechnen. Nutzen Sie dies, um eine Gerade h anzugeben, die mit E keinen Schnittpunkt hat.

Lösungsvorschlag 4:

Zu a) Sei $S(u|v|w)$ ein Schnittpunkt von E und g, dann erhalten wir folgende vier Gleichungen: Weil S auf E liegt gilt: $u + 3v - 4w = 1$ und weil S auf g liegt, gibt es ein t mit $u = 2 + 4r$ und $v = 1$ und $w = 5 - 3t$ Setzen wir nun die drei letzten Gleichungen in die erste ein, erhalten wir eine Gleichung mit der Unbekannten t.:
$(2 + 4r) + 3(1) - 4(5 - 3t) = 1$ oder $2 + 4r + 3 - 20 + 12t = 1$ oder $16t = 16$, d.h. $t = 1$.
Setzen wir diese t in die Gerade ein, erhalten wir den Ortsvektor des Schnittpunktes: $\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist $S(6|1|2)$

Zu b) Eine Gerade hat genau dann keinen Schnittpunkt mit E, wenn sie parallel zur Ebene ist, d.h. wenn der Richtungsvektor senkrecht zur Normalen der Ebene ist, und der Stützvektor nicht auf der Ebene liegt.

Wir benötigen also einen Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, der senkrecht zu

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist, d.h. für den gilt $x + 3y - 4z = 0$. Wir müssen nur eine von sehr vielen Lösungen angeben. Es dürfen aber nicht alle drei Variablen Null sein.

Wir wählen etwa den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da P(2|1|5) nicht auf E liegt, der Schnittpunkt von E und g ist ja ein anderer Punkt, wissen wir, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die gewünschte Bedingung erfüllt.

Merke*: Wenn Du mit Ebenen etwas machen sollst, ist meist die Koordinatenform die beste Variante. Alle können hoffentlich die Koordinatenform mit Hilfe des Verfahrens „Bestimme die Normale“ ausrechnen.*

Merke*: Nehme an, dass es einen Schnittpunkt gibt, wenn Du einen oder alle Schnittpunkte bestimmen sollst. Damit erhältst Du eine oder mehrere Gleichungen, deren Lösungen Du bestimmen musst.*

Aufgabe 5: [3P] Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt A, der nicht auf E liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf E bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

Lösungsvorschlag 5: Mit g bezeichnen wir die Gerade, die senkrecht auf E steht und durch A geht. Die Gerade steht genau dann senkrecht auf E, wenn gilt: Richtungsvektor von g = Normalenvektor von E. Sie geht dann durch A, wenn der Ortsvektor der Geraden = Ortsvektor von A ist. Schneiden wir die Gerade g mit der Ebene E, erhalten wir den Punkt der Ebene, der A am nächsten ist.

Merke*: Bei solchen Aufgaben muss nicht beschrieben werden, wie man rechnet, sondern wie man mathematisch vorgeht, welche* ***Bausteine*** *man verwendet. Wenn man schreibt, man setzt die Gerade in die Ebene ein, so ist dies falsch. Das ist logisch unsinnig. Wenn ein Punkt auf g und E ist, so erhält man zwei Gleichungen für den Punkt. Diese Gleichungen muss man lösen, dabei kann man dann das Einsetzungsverfahren verwenden.*

Wahlteil (etwa 40 min) – Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.

Aufgabe 6: Gegeben sind der Punkt P(3|2|3), die Ebene E, die durch die Punkte A(0|0|-4), B(1|2|-4) und C(4|-2|1) bestimmt ist., die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

a) [3P] Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene E (Zwischenergebnis: $E:-2x_1+x_2+2x_3=-8$)

b) [3P] Bestimmen Sie den Abstand des Punkte P von g

c) [3P] Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf g, die von der Ebene E den Abstand 3 LE haben.

Lösungsvorschlag 6:

Zu a) Die Parameterform der Ebene E ist $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$

Sei $\vec{n}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ eine Normale, dann gilt $\begin{aligned}u+2v&=0\\4u-2v+5w&=0\end{aligned}$

Da wir nur eine Lösung benötigen, können wir in Gl.1 $v=1$ und $u=-2$ wählen. Damit wird Gl 2 zu $-8-2+5w=0$ oder $w=2$. Damit ist die Normale $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ und die Normalenform $E: -2x+y+2z=2\cdot(-4)=-8$

Zu b) Schritt 1: Die Ebene senkrecht zu g durch P ist die Ebene mit dem Stützvektor OA und dem Normalenvektor = Richtungsvektor von g, d.h.

$E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0$ oder $E:x+y=3+2=5$

Schritt 2: Sei S(u,v,w) ein Schnittpunkt von g und E, so gilt: $3+t+4+t=5$ oder $2t=-2$ oder $t=-1$. Damit ist der Schnittvektor

$\overrightarrow{0S}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$

Schritt 3: Der Abstand des Punktes P von g ist damit die Länge des Vektors

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+1^2+8^2} = \sqrt{66} \approx 8{,}12$$

Zu c) Die Punkte der Geraden $g:\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sind die „laufenden Punkte“

$P(3+t|4+t|-5)$. Sei P ein solcher Punkt, der von der Ebene den Abstand 3 hat. Wir bestimmen dazu die Hessesche Normalenform der Ebene

$E:\dfrac{-2x_1+x_2+2x_3+8}{\sqrt{4+1+4}} = 0$. Setzen wir den Punkt P in die HNF ein und nehmen davon den Betrag, erhalten wir den Abstand:

$$\left|\frac{-2(3+t)+(4+t)+2(-5)+8}{\sqrt{4+1+4}}\right| = d = 3$$

Wir formen um $\left|\dfrac{-6-2t+4+t-10+8}{3}\right| = 3$ oder $|-4-t| = 9$

Fall 1: Aus $-4-t=-9$ folgt die erste Lösung $t=5$
Fall 2: Aus $-4-t=9$ folgt die zweite Lösung $t=-13$
Damit sind die beiden Punkte $R(8|9-5)$ und $T(-10|-9-5)$

Aufgabe 7: Gegeben ist die Ebenenschar $E_b:-2x_1+2bx_2-bx_3=4$

a) [3P] Zeigen Sie, dass es eine Gerade h gibt, die in allen Ebenen E_b liegt. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

b) [3P] Untersuchen Sie, ob es Ebenen der Schar gibt, die zueinander orthogonal oder zueinander parallel liegen.

c) [2P] Bestimmen Sie die Menge aller Punkt, der x_2x_3-Ebene, die in keiner Ebene E_b liegen.

Lösungsvorschlag 7:

Zu a) Es gibt prinzipiell zwei Arten, wie man diese Aufgabe lösen kann:

Variante 1: Wenn sich alle Ebenen in einer Geraden schneiden, müssen sich auch zwei in dieser Geraden schneiden. Damit kann man die Gerade bestimmen, indem man etwa $E_0:-2x_1=4$ und $E_1:-2x_1+2x_2-x_3=4$ schneidet und dann noch überprüft, ob alle Punkte dieser Schnittgeraden auch auf den übrigen Ebenen liegen.

Variante 2: Man schneidet $E_0:-2x_1=4$ mit $E_b:-2x_1+2bx_2-bx_3=4$. Die Schnittgerade darf nun nicht von b abhängen. Ist dies der Fall schneiden sich alle Ebenen in dieser Geraden.

Zu Variante 1: Sei $S(e|f|g)$ ein Schnittpunkt von $E_0:-2x_1=4$ und $E_1:-2x_1+2x_2-x_3=4$. Dann $-2e=4$ und $-2e+2f-g=4$. Die erste Gleichung liefert uns $e=-2$. Setzen wir dies in die zwei ein, erhalten wir eine Gleichung mit 2 Unbekannten $4+2f-g=4 \Rightarrow 2f-g=0$. Wir können dann eine Unbekannte beliebig wählen, etwa $f = r$ und dann die dritte berechnen $2r - g = 0 \Rightarrow g = 2r$

Damit gilt für den Ortsvektor von S:

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dies ist die Gleichung der Schnittgeraden.

Wir zeigen: Jeder Punkt dieser Schnittgeraden, d.h. $(-2|r|2r)$ liegt auf $E_b: -2x_1 + 2bx_2 - bx_3 = 4$. Wir setzen die drei Punktkoordinaten in E_b ein: $-2 \cdot (-2) + 2br - b \cdot 2r = 4$. Damit liegt der Punkt auf der Ebene E_b

Zu Variante 2: *Sei* $S(e|f|g)$ ein Schnittpunkt von $E_0: -2x_1 = 4$ und $E_b: -2x_1 + 2bx_2 - bx_3 = 4$. Dann gilt $-2e = 4$ und $-2e + 2bf - bg = 4$. Die erste Gleichung liefert uns $e = -2$. Setzen wir dies in die zwei ein, erhalten wir eine Gleichung mit 2 Unbekannten $4 + 2bf - bg = 4 \Rightarrow 2bf - bg = 0 \Rightarrow 2f - g = 0$.

Wir können nun eine Unbekannte beliebig wählen, etwa $f = r$ und dann die dritte berechnen $2r - g = 0 \Rightarrow g = 2r$

Damit gilt für den Ortsvektor von S:

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da die Gerade unabhängig von b ist, ist sie für alle b gleich. Damit schneiden sich alle Ebenen in dieser Geraden.

Zu b) Seien $E_b: -2x_1 + 2bx_2 - bx_3 = 4$ und $E_c: -2x_1 + 2cx_2 - cx_3 = 4$ zwei Ebenen, die orthogonal sind, dann müssen die Normalen der Ebenen ebenfalls orthogonal sind, also gilt $\begin{pmatrix} -2 \\ 2b \\ -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2c \\ -c \end{pmatrix} = 0$ oder

$4 + 4bc + bc = 0 \Rightarrow bc(4+1) = -4 \Rightarrow b = -\dfrac{4}{5c}$ d.h. die Ebene $E_{\frac{-4}{5c}}$ ist senkrecht zu E_c. Damit gibt es außer für E_0 zu jeder Ebene eine zu ihr senkrechte Ebene.

Zu c) Die Punkte der x2-x3-Ebene $x_1 = 0$ sind von der Gestalt $P(0|y|z)$. Gefragt ist, für welche Punkte es eine Ebene gibt, in der dieser Punkt liegt. Wir suchen also z.B.: eine Gleichung, die sowohl b enthält also auch diesen Punkt (d.h. die drei Koordinaten des Punktes. Wenn man so weit gedacht hat, ist das weitere Vorgehen wohl eher naheliegend:

Wenn ein solcher Punkt auf der Ebene E_b liegt, dann gilt $2by - bz = 4$ oder $b(2y - z) = 4$. Gesucht ist ein b, so dass die Gleichung richtig ist. Also müssen wir nach b auflösen!

Wenn $2y - z \neq 0$ ist kann man nach b auflösen, man dividiert einfach durch $2y - z$ und erhält, dass der Punkt P mit $2y - z \neq 0$ auf der Ebene $E_{\frac{4}{2y-z}}$ liegt.

Wenn $2y - z = 0$ ist, gibt es kein b, so dass die Gleichung gilt.

Damit sind genau die Punkte der Geraden $h: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf keiner Ebene.

Tipp: Versucht Euch immer klar zu machen, was gesucht ist: Hier ein b in Abhängigkeit eines Punktes. Und dann geht bitte gezielt vor. In der Schule kann man die Abhängigkeit fast immer mit einer Gleichung bestimmen. Wenn nicht, ist es normalerweise recht schwer.