Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)

Aufgabe 1: [2P] Leiten Sie ab:

a) $f(x) = xe^{2x^3-4}$

Lösungsvorschlag 1:

Beachte, dass man die Produktregel benötigt und dann beim Ableiten der e-Funktion noch die Kettenregel.

$$f'(x) = (x)' \cdot \left(e^{2x^3-4}\right) + (x) \cdot \left(e^{2x^3-4}\right)' =$$
$$= 1 \cdot \left(e^{2x^3-4}\right) + (x) \cdot e^{2x^3-4} \cdot (2 \cdot 3 \cdot x^2)$$
$$= e^{2x^3-4}\left(1 + 6x^3\right)$$

Aufgabe 2: [4P] Bestimmen Sie die Integrale

a) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int_1^e \frac{2}{5x} dx$

Lösungsvorschlag 2:

a) Vor dem Integrieren müssen wir Potenzen in die Standardform bringen.

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 = \left[4 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 =$$
$$= \left[4 \cdot \sqrt{x} \right]_1^4 = (4 \cdot 2) - (4 \cdot 1) = 4$$

b) Hier müssen wir auf unsere Erfahrung zurückgreifen und wissen, dass die Stammfunktion von 1/x der Logarithmus ist – die Ableitung von 1/x ist der Logarithmus! (Bitte unbedingt fürs Abi lernen – und nicht wieder vergessen)

$$\int_1^e \frac{2}{5x} dx = \frac{2}{5} \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{2}{5} \left[\ln(x) \right]_1^e = \frac{2}{5} \cdot \left[\left(\ln(e) - \ln(1) \right] = \frac{2}{5} \cdot [1-0] = \frac{2}{5}$$

Wer will kann natürlich auch wie folgt vorgehen (beachte, die Kettenregel beim Ableiten der Stammfunktion)

$$\int_1^e \frac{2}{5x} dx = \left[2\ln(5x) \cdot \frac{1}{5} \right]_1^{3e} = \frac{2}{5} \left[\ln(5x) \right]_1^{3e} = \frac{2}{5} \left(\left(\ln(5e) - \ln(5) \right) =$$
$$= \frac{2}{5} \left(\ln(5) + \left(\ln(e) - \ln(5) \right) \right) = \frac{2}{5} \ln(e) = \frac{2}{5}$$

Merke: Wegen $\ln(5x) = \ln(5) + \ln(x)$ sind $\ln(5x)$ und $\ln(x)$ zwei verschiedene Stammfunktionen, die sich um die Konstante $\ln(5)$ unterscheiden.

Aufgabe 3: [3P] Gegeben sind die drei Punkte P(1 / 3 / a) Q(4 / 6 / 2+a) R(3 / 4 / a).

a) Geben Sie die Parametergleichung der Ebene durch diese drei Punkte an.

b) Für welchen Wert a liegt der Nullpunkt auf der Ebene?

Lösungsvorschlag 3: a) Die Parmeterform der Ebene ist:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-3 \\ 2+a-a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-1 \\ a-a \end{pmatrix} \text{ oder } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Wenn der Koordinatenursprung auf der Ebene liegt, dann gibt es Zahlen ru und s mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus der Zeile 1 folgt: $0 = 1 + 3r + 2s$ oder $3r = -1 - 2s$ oder Setzen wir diese Gleichung in die Zeile 2 ein, erhalten wir
$0 = 3 - 1 - 2s + 3s$ oder $s = -2.$ Und damit $3r = -1 + 4$, d.h. $r = 1$. Damit wird die dritte Zeile zu $a = -2$
Für a = -2 liegt der Ursprung auf der Ebene (dann ist r =1 und s = -2)

Aufgabe 4: [2P] Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\left(3x^2 - 9\right)\left(e^{2x} - 4\right) = 0$.

Lösungsvorschlag 4: Das vielleicht Wichtigste beim Bestimmen von Nullstellen ist:
Wenn ein Produkt Null ist, so ist mindestens einer der beiden Faktoren Null.
(Merke: Das gilt nur, wenn das Produkt Null ist, nicht wenn es etwa 2 ist!)
1. Möglichkeit:

$$3x^2 - 9 = 0$$
$$3x^2 = 9$$
$$x^2 = 3$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

2. Möglichkeit:

$$e^{2x} - 4 = 0$$
$$e^{2x} = 4$$
$$2x = \ln(4)$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{4}) = \ln(2)$$

Aufgabe 5: [5P] Für die Temperatur in einer Tasse Kaffee gilt $T(t) = 25 + 70 \cdot 0.946^t$ (t = Zeit in min)
Machen Sie Aussagen über Anfangstemperatur, Endtemperatur und den Abkühlungsvorgang. Wann hat der Kaffee die Trinktemperatur 60°C erreicht?
Schreiben Sie die Funktion noch mit Hilfe der exp-Funktion.
Wann kühlt sich der Kaffee um 1°C pro 5 min ab?

Lösungsvorschlag 5: Die Anfangstemperatur ist T(0)=25+70=95. Der zweite Summand der Temperatur, $70 \cdot 0.946^t$ nimmt exponentiell ab; ihr Grenzwert ist 0. Damit ist die Endtemperatur, der Grenzwert der Temperatur für $t \to \infty$ $T_{Ende} = 25$.

Der Abkühlungsvorgang ist exponentiell.

Sei t so, dass $T(t)=60$ ist, dann gilt $25+70\cdot 0.946^{t}=60$ oder $0.946^{t}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$.
Wendet man auf beide Seiten den ln an, erhält man
$\ln\left(0.946^{t}\right)=t\ln\left(0.946\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ damit ist $t=\frac{-\ln(2)}{\ln\left(0.946\right)}$
Die Darstellung der Funktion mit der exp-.Funktion ist:
$T\left(t\right)=25+70\cdot 0.946^{t}=25+70\cdot\exp\left(\ln\left(0{,}946^{t}\right)\right)=25+70\cdot\exp\left(\ln\left(0{,}946\right)\cdot t\right)$

Sei t so, dass $T(t)-T(t+5)=1$, so erhält man nach Einsetzen von T(..):

$$25+70\cdot 0.946^{t}-\left(25+70\cdot 0.946^{t+5}\right)=70\left(0.946^{t}-0.946^{t+5}\right)=70\cdot 0.946^{t}\left(1-0.946^{5}\right)=1$$

oder $0{,}946^{t}=\frac{1}{70\cdot\left(1-0.946^{5}\right)}$ oder wenn man auf beide Seiten den ln anwendet:

$$\ln\left(0{,}946^{t}\right)=\ln\left(\frac{1}{70\cdot\left(1-0.946^{5}\right)}\right)=\ln(1)-\ln\left(70\cdot\left(1-0.946^{5}\right)\right)=-\ln(70)+\ln\left(1-0.946^{5}\right)$$

oder $t=\frac{-\ln(70)+\ln\left(1-0.946^{5}\right)}{\ln\left(0{,}946\right)}$

Wahlteil (etwa 40 min) – Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.

Aufgabe 6: [4P] Im See wurden 400 Fische ausgesetzt, 5 Wochen später waren es bereits 520 Fische. Die Zahl der Fische in dem See nimmt exponentiell zu. Wann werden es 1000 Fische sein? Wie groß ist die Verdopplungszeit?

Lösungsvorschlag 6: Die Wachstumsfunktion ist

$$F: \text{Zeit in Wo} \rightarrow \textit{Fische}$$
$$t \mapsto \text{p}(k \cdot t)$$

Da $F(0) = 400$, folgt $a = 400$.

Da $F(5) = 520$, folgt $400 \cdot \exp(k \cdot 5) = 520$ oder $\exp(k \cdot 5) = \frac{520}{400} = \frac{52}{40} = \frac{13}{10} = 1{,}3$

oder $k = \frac{\ln(1{,}3)}{5} = 0{,}0525$

Damit ist die Wachstumsfunktion

$$F: \text{Zeit in Wo} \rightarrow \textit{Fische}$$
$$t \mapsto \text{exp}\left(\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t\right) = 400 \cdot \exp\left(0{,}0525 \cdot t\right)$$

Sei t so, dass $F(t) = 1000$ ist. Damit folgt $400 \cdot \exp\left(\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t\right) = 1000$ oder

$\exp\left(\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t\right) = \frac{10}{4} = 2{,}5$ oder $\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t = \ln(2{,}5)$ oder $t = 5 \cdot \frac{\ln(2{,}5)}{\ln\left(1{,}3\right)} = 17{,}46$

Sei T die Verdopplungszeit, so gilt $F(T) = 800$, oder $400 \cdot \exp\left(\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t\right) = 800$

oder $\exp\left(\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t\right) = 2$ oder $\frac{\ln(1{,}3)}{5} \cdot t = \ln(2)$ oder $t = 5 \cdot \frac{\ln(2)}{\ln\left(1{,}3\right)} = 13{,}21$

Aufgabe 7: [5P] Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 250 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion B mit

$$\text{B}: \text{Zeit in min} \rightarrow \text{Flüssigkeit in l}$$
$$\text{t} \mapsto 100 \cdot \exp(-0{,}02 \cdot \text{t})$$

Wie viel Flüssigkeit ist zu Beginn im Behälter?
Zu welchem Zeitpunkt ist der Flüssigkeitsbehälter zur Hälfte gefüllt.
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeit im Behälter stets zunimmt.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Flüssigkeitsmenge im Behälter.
Aus Sicherheitsgründen darf der Behälter höchstens zu 90% gefüllt werden. Zeigen Sie, dass der Behälter sogar stets weniger als diese maximal zulässige Menge enthält.

Lösungsvorschlag 7:

(Vergleiche Abi 2008 Aufgabe I.3.1, dort ist dies Teilaufgabe a)

Die Flüssigkeit zu Beginn ist $B(0) = 220 - 100 \cdot e^{-0,02\cdot 0} = 220 - 100 = 120$

Sei t so, dass B(t)=250/2 dann gilt

$$\begin{aligned} 220 - 100 \cdot e^{-0,02\cdot t} &= 125 \\ -100 \cdot e^{-0,02\cdot t} &= -95 \\ e^{-0,02\cdot t} &= 0,95 \\ -0,02 \cdot t &= \ln 0,95 \\ t &= \frac{-\ln(0,95)}{0,02} = 2,56 \end{aligned}$$

Der Flüssigkeitsspiegel wächst, etwa:

Wenn x größer wird, wird $e^{-0,02\cdot x}$ kleiner. Damit wird von 250 immer weniger abgezogen.
(Ein Hilfsmittel, das man sich zusätzlich merken sollte ist: Wenn B'(t) >0 ist, dann wächst B(t). Hier gilt $B'(t) = -100 \cdot e^{-0,02\cdot t} \cdot (-0,002) = 0,2 \cdot e^{-0,02\cdot t} > 0$, da die e-Funktion stets größer als Null ist. Hier ist dieses Vorgehen allerdings zu kompliziert.)

Wir müssen zeigen, dass für alle t gilt: $B(t) \le 0,9 * 250 = 225$.

Das ist aber sicher der Fall, da ja sogar 220 obere Schranke der Funktion ist.

Aufgabe 8: a) [3P] Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen f und g begrenzt wird $f(x) = x^2 - 4$ und $g(x) = x + 2$

b) [4P] Zeigen Sie, der Flächeninhalt , den der Graph der Funktion $f(x) = t - x^2$ mit $t > 0$ mit der x-Achse einschließt, ist das 4/3-fache des Flächeninhalts des der Parabel einbeschriebenen Dreiecks, dessen Spitze auf dem Scheitel der Parabel liegt und dessen Grundseite die x-Achse zwischen den Nullstellen der Parabel bildet

c) [3P] Für welches positive t hat die Fläche zwischen der Parabel mit der Gleichung $f(x) = -x^2 + tx$ und der x-Achs die Fläche 288?

d) [4P] Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, der Tangente in P(0,5 | 3,75) und der x-Achse begrenzt wird.

Lösungsvorschlag 8:

Zu a) Sei x ein Schnittpunkt von g und h, dann gilt $x^2 - 4 = x + 2$ oder $x^2 - x - 6 = 0$. Damit ist $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = 3 / -2$

Das Integral zwischen f und g ist

$$i = \int_{-2}^{3} x^2 - x - 6dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{3} = \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right) = -20\frac{5}{6}$$

Damit ist die Fläche 20,866

Zu b) Die Schnittpunkte der Parabel $f(x)=t-x^2$ mit der x-Achse sind $x_{1/2}=\pm\sqrt{t}$. Die Fläche der Parabel zwischen den Schnittpunkten ist

$$A=\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} t-x^2dx=\left[tx-\frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}=\left(t\sqrt{t}-\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right)-\left(-t\sqrt{t}+\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right)=\frac{4}{3}t\sqrt{t}$$

Die Fläche des einbeschriebenen Dreiecks ist $A'=\frac{1}{2}g\cdot h=\frac{1}{2}2\sqrt{t}\cdot t=\sqrt{t}\cdot t$

Damit ist die Aussage richtig.

Zu c) Sei x ein Schnittpunkt der Parabel $f(x)=-x^2+tx$ mit der x-Achse, so gilt $-x^2+tx=0$ oder $-x(x-t)=0$ Damit sind die Schnittpunkt $x_1=0$ und $x_2=t$

Die Fläche zwischen der Parabel und den beiden Schnittpunkten ist

$$\int_0^t -x^2+txdx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^t=-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t\cdot t^2=\frac{1}{6}t^3$$

Sei nun t so, dass die Fläche 288 ist, dann gilt $\frac{1}{6}t^3=288$ oder $t^3=6\cdot 288$ oder $t=12$

Zu d) Wir benötigen die Tangente in a=0,5 an $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}$,

d.h. $t(x)=f'(x)(x-a)+f(a)$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3} \quad // \quad f(0,5)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}=4-\frac{1}{4}=3,75 \quad // \quad f'(0,5)=-\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-16$$

. Damit ist

$$t(x)=-16(x-0,5)+3,75=-16x+11,75$$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: Sei x so, dass $t(x)=-16x+11,75=0$, dann gilt $x=\frac{47}{64}=0,734375$

Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse: Sei x so, dass $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}=0$ dann gilt $x_{1/2}=\pm 2$

Damit ist die gesuchte Fläche: $\left|\int_{0,5}^{0,734375} f(x)-t(x)dx\right|+\left|\int_{0,734375}^{2} f(x)dx\right|=...$

Oder

$$\left|\int_{0,5}^{2} f(x)dx\right|-(\text{Dreieck unterhalb der Tangente})=\int_{0,5}^{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}dx-\frac{1}{2}3,75\cdot\left(\frac{47}{64}-0,5\right)$$

$$=\left[-\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right]_{0,5}^{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{15}{64}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}\right)-\left(-2-\frac{1}{8}\right)-\frac{225}{512}=-1+2+\frac{1}{8}-\frac{225}{512}=$$

$$\frac{351}{512}=0,686$$