## Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

**(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)**

**Aufgabe 1**: [2P] Leiten Sie ab: $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$

**Lösungsvorschlag 1**:

Wir formen vor dem Ableiten um $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}$. Nun ergibt sich mit der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cdot e^{2x} = e^{2x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}(4x+1)}{\sqrt{x}}$$

**Aufgabe 2**: [4P] Bestimmen Sie die Integrale

a) $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\, dx$ b) $\int_1^e \frac{3}{4x} dx$

**Lösungsvorschlag 2**:

Zu a)

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\, dx = 4 \cdot \int_0^1 (2x+1)^{-3} dx = \left[ 4 \cdot (2x+1)^{-2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \right]_0^1$$

$$= \left[ -\frac{1}{(2x+1)^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{9} - \left( -\frac{1}{1} \right) = \frac{8}{9}$$

Beachte bitte, dass wir das Integral immer mit Ableiten überprüfen.

Zu b) $\int_1^e \frac{3}{4x} dx = \int_1^e \frac{3}{4} \frac{1}{x} dx = \left[ \frac{3}{4} \ln(x) \right]_1^e = \left( \frac{3}{4} \ln(e) \right) - \left( \frac{3}{4} \ln(1) \right) = \frac{3}{4}$, da $\ln(e) = 1$ und $\ln(1) = 0$

**Aufgabe 3**: [3P] Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$

**Lösungsvorschlag 3**:

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad 3e^x - (e^x)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$$

Substitution von $e^x = z$ liefert die quadratische Gleichung $z^2 - 3z + 2 = 0$ mit den Lösungen $z_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = 2/1$

Aus $z_1 = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x_1 = \ln(2)$ und aus $z_2 = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$

**Aufgabe 4**: [3P] Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt. Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist

**Lösungsvorschlag 4**:

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ und $f''(x) = -x + 2$

Notwendige Bedingung für WP: Sei x WP, dann gilt $f''(x) = -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Die Tangente in x=2 ist

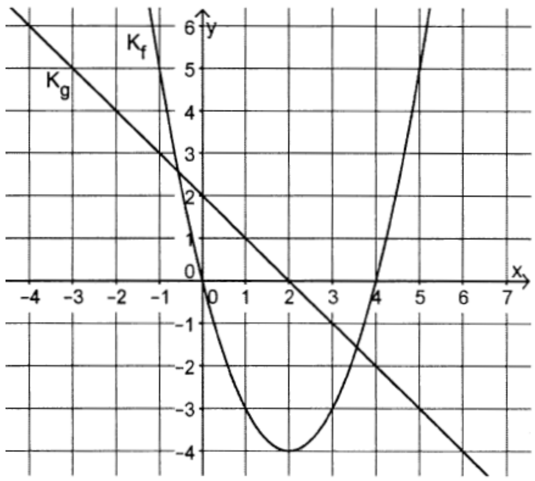
$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2) = \left(-2+4-1\right)(x-2) + \left(-\frac{1}{6}8 + 4 - 2\right)$ oder

$t(x) = 1(x-2) + \left(2 - \frac{4}{3}\right) = x - \frac{4}{3}$

**Aufgabe 5**: [4P] Die Abbildung zeigt die Graphen $K_f$ und $K_g$ zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie f(g(3)).
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass f(g(x)) = 0 ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Bestimmen Sie h'(2).




**Lösungsvorschlag 5**:

a) Es gibt zwei Möglichkeiten, die Aufgabe zu bearbeiten:
i) Die Werte direkt der Zeichnung entnehmen:
$3 \mapsto \qquad \mapsto$
Aus $f(z) = 0$ folgt $z_{1/2} = 0/4$ aus $g(x) = 0/4$ folgt $x = 2/-2$
ii) Funktionsterme bestimmen:
Der Zeichnung kann man den Scheitel der Parabel S(2|-4) und a = 1 entnehmen und erhält als Gleichung $f(x) = (x-2)^2 - 4$.
Zur Gerade gehört die Gleichung $g(x) = -x + 2$. Wird f mit g verkettet, ergibt sich $k(x) = f(g(x)) = x^2 - 4$ und damit $k(3) = f(g(3)) = 5$.

$k(x) = f(g(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$. Für $x = -2$ oder $x = 2$ ist die Gleichung erfüllt.

b) Auch hier gibt es wieder zwei Arten:
i) Führt man die Produktregel aus, so gilt:
$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ und demnach konkret
$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2) = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) = 4$ (Werte aus der Zeichnung).
ii) Mit Hilfe der Gleichungen ergibt sich
$h(x) = f(x) \cdot g(x) = -x^3 + 6x^2 - 8x$ und daraus $h'(x) = -3x^2 + 12x - 8$ und daraus wiederum $h'(2) = -3 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 8 = 4$.

## Wahlteil (etwa 40 min) – Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.

**Aufgabe 6**: Der fiktive Planet Populus hatte im Jahr 2010 noch 70 000 Bewohner. Pro Jahr nimmt die Bevölkerung um 3% ab.

a) [2P] Bestimmen Sie die Funktion, die die Bevölkerungsentwicklung seit 2010 beschreibt.

b) [2P] Wann wird sich die Bevölkerung halbiert haben? Wann leben noch 10 000 Bewohner auf dem Planeten?

c) [2P] Wie viele Bewohner leben durchschnittlich in den drei Jahren von Anfang 2017 bis Anfang 2020 auf dem Planeten?

**Lösungsvorschlag 6**:

Zu a) Die Wachstumsfunktion ist durch 2 Parameter c und k festgelegt, die wir bestimmen.

$B$: Zeit in Jahren seit 2010 $\rightarrow$ Bewohner

$t \mapsto$ ɔ$(k \cdot t)$

Es gilt $B(0) = c = 70000$

In einem Jahr nimmt die Bevölkerung um 3% ab, für t =1 gilt also $B(1) = c \cdot \exp(k \cdot 1) = 0,97 \cdot 70000 = 67900$ oder nach Division mit c und nachdem man auf beiden Seiten den ln angewendet hat: $k = \ln(0,97) = -0,03046$.

Damit ist

$B$: Zeit in Jahren seit 2010 $\rightarrow$ Bewohner

$t \mapsto 0 \cdot \exp(\ln(0,97) \cdot t)$

Zu b) Seit $T_H$ die Halbwertszeit, so gilt

$B(T_H) = 70000 \cdot \exp(\ln(0,97) \cdot T_H) = 70000/2$ Nach Division von 70000 und dem Anwenden des ln, ergibt sich $\ln(0,97) \cdot T_H = \ln(1/2) = -\ln(2)$. Wir lösen nch $T_H$ auf und erhalten $T_H = \dfrac{-\ln(2)}{\ln(0,97)} = \dfrac{-\ln(2)}{-0,03046} = 22,76$

Im Jahr 2032 bis 2034 hat sich die Bevölkerung halbiert.

Sei t so, dass B(t)=10000 ist, dann gilt $70000 \cdot \exp(-0,03046 \cdot t) = 10000$ . Divison von 70000 und ln, ergibt: $\ln(0,97) \cdot t = \ln\left(\dfrac{1}{7}\right) = -\ln(7)$ oder

$$t = \frac{-\ln(7)}{\ln(0,97)} = 63,89$$

im Jahr 2074 leben noch 10 000 Bewohner auf dem Planeten.

Zu c) Die durchschnittliche Bevölkerung im Zeitraum von t = 7 bis 10 beträgt:

$$\frac{1}{10-7}\int_7^{10} B(t)dt = \frac{1}{3}\int_7^{10} 70000\cdot\exp(\ln(0{,}97)\cdot t)dt = \frac{70000}{3}\left[\frac{1}{\ln(0{,}97)}\cdot\exp(\ln(0{,}97)\cdot t)\right]_7^{10}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{70000}{\ln(0{,}97)}\left(\exp(\ln(0{,}97)\cdot 10)-\exp(\ln(0{,}97)\cdot 7)\right)=54050$$

**Aufgabe 7**: [5P] Bei einem biologischen Experiment wird ein Bakterienstamm in eine Petrischale der Größe 50 cm$^2$ gesetzt. Zu Beginn ist die von den Bakterien bewachsene Fläche 1 cm$^2$. Nach 3 Tagen beträgt die Fläche 17 cm$^2$. Die Zunahme der bewachsenen Fläche ist (näherungsweise) proportional zur noch freien Fläche, die Funktion wird also beschrieben durch

$$\begin{array}{llll} B: & \text{Zeit in Tagen} & \to & \text{Fläche in cm}^2 \\ & t & \mapsto & c\cdot\exp(-k\cdot t) \end{array}$$

Bestimmen Sie die Parameter c und k.
Welche Fläche ist nach 7 Tagen bewachsen?
Wie lange muss man voraussichtlich warten, bis die bewachsene Fläche 40 cm$^2$ beträgt?

**Lösungsvorschlag 7**:

Bestimmen von c und k: Aus $B(0)=50-c=1$ folgt $c=49$. Aus

$50-49\cdot\exp(-k\cdot 3)=17$ folgt $-49\cdot\exp(-k\cdot 3)=17-50=-33$ oder

$\exp(-k\cdot 3)=\frac{33}{49}$ oder $-k\cdot 3=\ln\left(\frac{33}{49}\right)$ oder $k=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{33}{49}\right)=0{,}1318$

Damit ist die Funktion

$$\begin{array}{llll} B: & \text{Zeit in Tagen} & \to & \text{Fläche in cm}^2 \\ & t & \mapsto & 49\cdot\exp(-0{,}1318\cdot t) \end{array}$$

Die nach 7 Tagen bewachsene Fläche ist

$B(7)=50-49\cdot\exp(-0{,}1318\cdot 7)=30{,}52$ . Nach 7 Tagen sind gut 30 cm$^2$ bewachsen.

Sei t so, dass 40 cm$^2$ bewachsen sind, dann gilt

$B(t)=50-49\cdot\exp(-0{,}1318\cdot t)=40$ oder $-49\cdot\exp(-0{,}1318\cdot t)=-10$ oder

$\exp(-0{,}1318\cdot t)=\frac{10}{49}$ oder $t=\frac{1}{-0{,}1318}\ln\left(\frac{10}{49}\right)=12{,}06$

Damit sind nach 12 Tagen 40 cm$^2$ bewachsen

**Aufgabe 8**: [4P]

a) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit $g(x)=5x-15$ mit dem Graphen von f mit $f(x)=x^3-9x^2+23x-15$ zwei gleich große Flächenstücke einschließt.

b) Die Funktion f mit $f(x)=x^2+2$ schließt zwischen a=1 und b=3 mit der x-Achse die Fläche A ein. Für welches m halbiert die Gerade $g(x)=mx$ diese Fläche?

**Lösungsvorschlag 8**:

Zu a) Sei x ein Schnittpunkt von g und f, dann gilt: $5x-15=x^3-9x^2+23x-15$
oder $0=x^3-9x^2+23x-5x$ oder $0=x\left(x^2-9x+18\right)$. Damit ist entweder

$$x_1 = 0 \text{ oder } x_{2/3}=\frac{9\pm\sqrt{81-4\cdot1\cdot18}}{2}=\frac{9\pm3}{2}=6/3$$

$$i_1=\int_0^3 x^3-9x^2+18xdx=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_0^3=\left(\frac{81}{4}-81+81\right)-0=20,25$$

$$i_2=\int_3^6 x^3-9x^2+18xdx=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+9x^2\right]_3^6=$$

$$=\left(\frac{36\cdot36}{4}-18\cdot36+9\cdot36\right)-\left(\frac{81}{4}-81+81\right)=-20,25$$

Da die Beträge der Integrale gleich sind, sind die Flächen gleich.

Zu b) Sei m so, dass die Fläche unterhalb der Funktion f zwischen a=1 und b=3 von der Geraden halbiert wird.
Die Fläche unterhalb der Funktion ist:

$$A_f=\left|i_f\right|=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2+2dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^3=(9+6)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=12\frac{2}{3}$$

m ist also so, dass

$$A_g=\left|i_g\right|=\int_1^3 g(x)dx=\int_1^3 mxdx=\left[\frac{1}{2}mx^2\right]_1^3=\left(\frac{9}{2}m\right)-\left(\frac{1}{2}m\right)=4m=6\frac{1}{3}$$

oder $m=\frac{1}{4}\frac{19}{3}=\frac{19}{12}=1,58333$

**Ruhig und überlegt rechnen!**
**Beschreibenden Text nicht vergessen.**

Viel Erfolg.