Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)

Aufgabe 1: [4P] Leiten Sie ab:

a) $f(x) = x^2 \sin(2x^3 - 4x)$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + \sqrt{2x}}{\sqrt{6x}}$

c) $\mathrm{g(x)} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \cos(\mathrm{x})}$ d) $f(x) = x^3 \cdot \cos\left(3x^2 + 2x\right)$

Lösungsvorschlag 1:

Anmerkungen: Vor dem Ableiten sollte man sich immer Folgendes klar machen: Fast alle Funktionen im Abi, die abgeleitet werden sollen, lassen sich aus anderen Funktionen zusammensetzen, sie sind Produkte, (Quotienten) oder Hintereinanderausführungen von einfacheren Funktionen, deren Ableitungen wir kennen.

a) Wir benötigen zuerst die Produktregel – und dann beim Ableiten des zweiten Faktors noch die Kettenregel.

$f'(x) = 2x \cdot \sin(2x^3 - 4x) + x^2 \cdot \cos(2x^3 - 4x) \cdot \left(6x^2 - 4\right)$

Bitte vergesst bei der inneren Ableitung die Klammer nicht.

b) Hier formen wir vor dem Ableiten um: Merke: Zahlen schreiben wir beim Ableiten immer mit Wurzeln, nicht als Exponenten.

Also $\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt{6x} = \sqrt{6} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

Damit ist $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + \sqrt{2x}}{\sqrt{6x}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{6}x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{4x}{\sqrt{6}x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}} x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

Somit ist $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6}} \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{9}{2\sqrt{6}} \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{x}}$

c) Bei dieser Aufgabe müssen wir zuerst die Kettenregel anwenden, da $g\left(x\right) = f\left(h\left(x\right)\right)$ eine Hintereinanderausführung ist. Die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ wird beim Berechnen der Funktionswerte nach $h(x) = x^2 + \cos(x)$ angewandt. Wir leiten f also zuerst nach t ab und ersetzen nach dem Ableiten, d.h. in $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ zuerst t wieder durch $x^2 + \cos(x)$ – und dann multiplizieren wird diesen Ausdruck mit der Ableitung der Funktion $\mathrm{h(x)} = \mathrm{x}^2 + \cos(\mathrm{x})$ d.h. mit $h'(x) = 2x - \sin(x)$

VORSICHT: Die innere Ableitung in Klammern setzen!

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \cos(x)}} \cdot \left(2x - \sin(x)\right) = \frac{2x - \sin(x)}{2\sqrt{x^2 + \cos(x)}}$$

d) Die Produkt- und Kettenregel liefert:

$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos\left(3x^2 + 2x\right) + x^3 \cdot \left(-\sin\left(3x^2 + 2x\right)\right) \cdot \left(6x + 2\right) =$

$3x^2 \cdot \cos\left(3x^2 + 2x\right) - \left(6x^4 + 2x^3\right) \cdot \sin\left(3x^2 + 2x\right)$

Aufgabe 2: [4P] Bestimmen Sie die x-Werte, bei denen die Tangente an die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ durch R(-1/0) geht.

Lösungsvorschlag 2:

Sei a ein x-Wert, an dem die Tangente durch R(-1/0) geht.

Dann ist die Gleichung der Tangente wegen $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ d.h. $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}$ und

$f(a) = 2\sqrt{a} \qquad t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (x - a) + 2\sqrt{a}$

Da der Punkt R(-1/0) auf der Tangente liegt, gilt

$0 = t(-1) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot (-1 - a) + 2\sqrt{a}$

Da die „Unbekannte" im Nenner ist, multiplizieren wir mit dem Hauptnenner und erhalten $0 = (-1 - a) + 2a = -1 + a$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass $a \geq 0$ ist, da der Definitionsbereich = $\mathbb{R}$ ist. Damit ergibt sich $a = 1$.

Aufgabe 3: **[4P]** Bestimmen Sie die Lösung von $\cos(2x - 3) + \left(\cos(2x - 3)\right)^2 = 2$

Lösen Sie die Gleichung $\left(3\mathrm{x}^2 - 9\right)\left(6 \cdot \sin(\mathrm{x}) - 4\right) = 0$.

Lösungsvorschlag 3:

1. Gleichung: Wir substituieren $z = cos(2x - 3)$ Damit erhalten wir die Gleichung $z + z^2 = 2$ oder $z^2 + z - 2 = 0$. Die MNF liefert

$z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \div (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1/-2$

Wir machen die Substitution wieder rückgängig,
Die erste Lösung $z = 1$ ergibt $cos(2x - 3) = 1$. Da $cos(x)$ nur für $x = 0$ den Wert 1 hat (und für $x = 2\pi k$) muss $2x - 3 = 0$ sein, dh. die Lösung ist $x = 1{,}5$
Die zweite Lösung $z = -2$ hat keine Lösung für x, da cos(x) nie -2 ist.

2. Gleichung: Das vielleicht Wichtigste beim Bestimmen von Nullstellen ist:
Wenn ein Produkt Null ist, so ist mindestens einer der beiden Faktoren Null. Deswegen klammert man beim Bestimmen von Nullstellen oft aus.
(Merke: Das gilt nur, wenn das Produkt Null ist, nicht wenn es etwa 2 ist!)
1. Möglichkeit:

$$3x^2 - 9 = 0$$
$$3x^2 = 9$$
$$x^2 = 3$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

2. Möglichkeit:

$$6\sin(x) - 4 = 0$$
$$\sin(x) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$x_3 = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Aufgabe 4: [4P] Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rrrcr} -x & +7y & -z & = & 5 \\ 4x & -y & +z & = & 1 \\ 5x & -3y & +z & = & -1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrcr} x & -2y & -z & = & 2 \\ & 2y & -4z & = & 1 \\ & 3y & -6z & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

Lösungsvorschlag 4:

Zu a) Wir schreiben die Gleichung in Matrixform und bringen sie auf obere Dreiecksgestalt

$$\begin{array}{rrrrl} -1 & 7 & -1 & 5 & \\ 4 & -1 & 1 & 1 & \mid 4*g1+g2 \\ 5 & -3 & 1 & -1 & \mid 5*g1+g3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} -1 & 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 27 & -3 & 21 & \mid :3 \\ 0 & 32 & -4 & 24 & \mid :4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl} -1 & 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 9 & -1 & 7 & \\ 0 & 8 & -1 & 6 & \mid 8*g2-9*g3 \end{array}$$

entweder

$$\begin{matrix} -1 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Rückwärts einsetzen ergibt:
G3 ergibt $z = 2$
G2 ergibt $9y - 2 = 7 \Rightarrow 9y = 7 + 2 \Rightarrow y = 1$
G3 ergibt $-x + 7 \cdot 1 - 2 = 5 \Rightarrow -x = 5 + 2 - 7 \Rightarrow x = 0$ **oder**

bei der letzten Umformung die 3. Spalte entfernen, d.h.

$$\begin{matrix} -1 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \end{matrix} \quad |\text{g2-g3} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} -1 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & & 1 \end{matrix}$$

Rückwärts einsetzen ergibt:
G3 ergibt $y = 1$
G2 ergibt $9 - z = 7 \Rightarrow z = 2$
G3 ergibt $-x + 7 \cdot 1 - 2 = 5 \Rightarrow -x = 5 + 2 - 7 \Rightarrow x = 0$

Die Lösung ist in jedem Fall: $x = 0; \quad y = 1; \quad z = 2$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zu b) Wir schreiben die Gleichung wieder in Matrixform und bringen sie auf obere Dreiecksgestalt

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ & 2 & -4 & 1 \\ & 3 & -6 & \frac{3}{2} \end{matrix} \qquad / \ 3 * g1 - 2 * g3$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ & 2 & -4 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Die letzte Gleichung ist immer richtig, also kann z.B. z beliebig gewählt werden, etwa $z = r$
Die zweite Zeile ergibt damit $2y - 4r = 1 \Rightarrow 2y = 4r + 1 \Rightarrow y = 2r + 0,5$
Und die erste Zeile: $x - 2y - z = 2 \Rightarrow x = 2 + 4r + 1 + r = 5r + 3$

Die Lösung ist also $x = 5r + 3; \quad y = 2r + 0,5; \quad z = r$ oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5r + 3 \\ 2r + 0,5 \\ r \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: [4P] Aus einem 2000 Jahre alten chinesischen Mathebuch: „Jemand verkauft zwei Büffel und fünf Hammel. Und der kauft 13 Schweine; dabei bleiben 1000 Münzen übrig. Verkauft er drei Büffel und drei Schweine, so kann er genau neun Hammel kaufen. Verkauft er sechs Hammel und acht Schweine, so fehlen im noch 600 Münzen, um fünf Büffel kaufen zu können. Wie viel kostet ein Büffel, ein Hammel, ein Schwein!"

Heute geht das viel einfacher als früher, da Schüler früher keine Buchstabenrechung zur Verfügung hatten! Diese ist eine Erfindung der Europäer des 16. Jahrhunderts, vor allem des Franzosen Viëta.

Lösungsvorschlag 5: Zuerst notieren wir die Bedeutung der Variablen
b = Preis eines Büffels
h = Preis eines Hammels
s = Preis eines Schweines.
Damit erhalten wir auf dem Text die folgenden drei Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} 2b+5h-13s=1000 & & 2b+5h-13s=1000 \\ 3b+3s=9h & \text{oder} & 3b-9h+3s=0 \\ 6h+8s=5b-600 & & -5b+6h+8s=-600 \end{array}$$

damit erhalten wir folgende Matrix

$$\begin{array}{rrrrl} 2 & 5 & -13 & 1000 & \\ 3 & -9 & 3 & 0 & (3\cdot I-2\cdot II) \\ -5 & 6 & 8 & -600 & (5\cdot I+2\cdot III) \end{array} \quad \text{ergibt} \quad \begin{array}{rrrrl} 2 & 5 & -13 & 1000 & \\ 0 & 33 & -45 & 3000 & (:3) \\ 0 & 37 & -49 & 3800 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & 11 & -15 & 1000 \\ 0 & & -16 & -4800 \end{array}$$

Rückwärts einsetzen ergibt:
III ergibt $s=300$ s
II ergibt damit $11\,h=1000+15\cdot 300=5500$
$h=500$
I ergibt schließlich $2b=1000-5\cdot 500+13\cdot 300=-1500+3900=1400$
$b=1200$

Damit kostet ein Büffel 1200, ein Hammel 500 und ein Schwein 300 Münzen.