## Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

**(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)**

**Aufgabe 1**: [4P] Leiten Sie ab:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}$ b) $f(x)=\frac{2\sqrt{3}x^2-x+\sqrt{2x}}{\sqrt{3x}}$

**Lösungsvorschlag 1**: a) Wir formen zuerst um: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}=\left(3x^2-2\right)^{-\frac{1}{2}}$ Jetzt leitern wir ab: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(3x^2-2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6x=\frac{-6x}{2\left(3x^2-2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-3x}{\sqrt{\left(3x^2-2\right)^3}}$

b) Wir formen wieder um

$f(x)=\frac{2\sqrt{3}x^2-x+\sqrt{2x}}{\sqrt{3x}}=\frac{2\sqrt{3}x^2}{\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x}{\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}=2x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ und leiten dann wieder ab: $f'(x)=2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{3x}}$

**Aufgabe 2**: [3P] Bestimmen Sie die x-Werte, bei denen die Tangente an die Funktion $f(x)=6\sqrt{x}$ durch R(-2/0) geht.

**Lösungsvorschlag 2**: Sei a der Punkt, dessen Tangente: $t(x)=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$ durch R(-2/0) geht.

Da $f'(x)=\frac{6}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ist, gilt $f(a)=6\sqrt{a}$ $f'(a)=\frac{3}{\sqrt{a}}$ .

Damit ist die Tangente $t(x)=\frac{3}{\sqrt{a}}\cdot(x-a)+6\sqrt{a}$

Da R(-2/0) auf der Tangente liegt, gilt: $0=\frac{3}{\sqrt{a}}\cdot(-2-a)+6\sqrt{a}$ . Wir lösen die Gleichung nach a auf: Es muss a größer Null sein. Multipliziert man mit $\sqrt{a}$ , erhält man $6+3a=6a$ oder $a=2$

Damit geht die Tangente bei x=2 durch den Punkt R.

**Aufgabe 3:** [3P] Bestimmen Sie die Lösung von $2-\sin(3x-4)=\left(\sin(3x-4)\right)^2$

**Lösungsvorschlag 3**: Wir substituieren $z=\sin(3x-4)$ und erhalten $2-z=z^2$ oder $z^2+z-2=(z+2)(z-1)=0$ . Die beiden möglichen Lösungen sind also $z_1=-2$ und $z_2=1$ (selbstverständlich kann man dies auch mit der MNF berechnen)

Resubstitution:

1. Fall: $z_1 = -2$ oder $-2 = \sin(3x-4)$ Diese Gleichung hat keine Lösung, da der sin nie kleiner als 1 ist.
2. Fall: $z_2 = 1$ oder $1 = \sin(3x-4)$. Der Sinus ist genau dann 1, wenn das Argument $\frac{\pi}{2}$ (oder $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$) ist. D.h. Die Lösung ist $3x-4 = \frac{\pi}{2}$ (allgemein: $3x-4 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$) oder $x = \frac{\pi+8}{6}$ (allgemein: $x = \frac{\pi+8}{6} + \frac{2\pi}{3}k$) ist.

**Aufgabe 4**: [2P] Bestimmen Sie die x-Werte der Extremstellen von $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 2$ .

(Entscheiden Sie, welche Extremumart vorliegt, die Bestimmung des Funktionswertes ist aber nicht verlangt.)

**Lösungsvorschlag 4**: Die notwendige Bedingung für ein Extremum in x ist $f'(x) = 0$ .

Es gilt: $f'(x) = x^3 - 4x$. Damit ist die notwendige Bedingung: $x\left(x^2-4\right) = 0$.

Ein extremum kann also nur bei $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm 2$ vorliegen.

Zu den hinreichenden Bedingungen:

Es muss $f''(x) = 3x^2 - 4$ von Null verschieden sein.

1. Fall: $x_1 = 0$: $f''(0) = -4 < 0$. Es liegt ein Maximum vor.
2. Fall: $x_2 = 2$: $f''(2) = 12 - 4 = 8 > 0$. Es liegt ein Minumum vor.
3. Fall: $x_3 = -2$: $f''(-2) = 12 - 4 = 8 > 0$. Es liegt ebenfalls ein Minumum vor.

**Bemerkung**: Wenn $f''(x) = 0$ ist, kann man nicht sagen, dass dies kein Extremum ist. Beispiel: $f(x) = x^4$ . Die zweite Ableitung ist 0, obwohl ein Tiefpunkt vorliegt.

**Aufgabe 5**: [3P] Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccc} 3x & +2y & +3z & = & 9 \\ & 4y & -3z & = & 6 \\ 2x & 4y & & = & 10 \end{array}$$

**Lösungsvorschlag 5**:

Das Gaussverfahren ergibt (G3 durch 2 dividiert) : $\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 9 \\ & 4 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & & 5 \end{array}$ $G1 - 3\cdot G3$

$\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 9 \\ & 4 & -3 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & -6 \end{array}$ $G2+G3$ oder $\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 9 \\ & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Rückwärts einsetzen:

G3 erlaubt z beliebig zu wählen, also $z = t$

G2 ergibt damit $4y - 3t = 6$ oder $y = 0{,}75t + 1{,}5$

G1 liefert: $3x + 2(0{,}75t + 1{,}5) + 3t = 9$ oder $3x = 9 - 3 - 4{,}5t$. Damit ist $x = 2 - 1{,}5t$.

Für die Lösungen gilt also: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 - 1{,}5t \\ 1{,}5 + 0{,}75t \\ 0 + t \end{pmatrix}$. Damit ist die Lösungsmenge eine

Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (setze $t = 4s$)

## Wahlteil (etwa 40 min) – **Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden.**

**Aufgabe 6:** [4P] Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist symetrisch zur y-Achse und hat in W(2|0) eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$

**Lösungsvorschlag 6:** Die gesuchte Funktion ist vom Grad 4. Da sie symmetrisch zur y-Achse ist, sind die Koeffizienten der Potenzen mit ungeraden Hochzahlen alle 0. Also ist $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ . Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen:

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2c$

Da W(2/0) auf dem Graphen liegt, gilt G1: $16a + 4c + e = 0$

Da die Steigung bei $x = 2$ den Wert $-\frac{4}{3}$ hat, gilt G2: $32a + 4c = -\frac{4}{3}$ oder

$96a + 12c = -4$ oder $24a + 3c = -1$

Da bei $x = 2$ ein WP ist, gilt G3: $48a + 2c = 0$ oder $24x + c = 0$

Damit lautet das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{matrix} 16 & 4 & 1 \\ 24 & 3 & \\ 24 & 1 & \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \quad G2-G3 \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{matrix} 16 & 4 & 1 \\ 24 & 3 & \\ 0 & 2 & \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

Rückwärts einsetzen ergibt:

G3: $2c = -1$ oder $c = -\frac{1}{2}$

G2: $24a - \frac{3}{2} = -1$ oder $24a = \frac{1}{2}$ oder $a = \frac{1}{48}$

G1: $\frac{16}{48} - 2 + e = 0$ oder $e = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

Damit ist das gesuchte Polynom: $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$

**Aufgabe 7:** [4P] Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte A( 3 | 0 | 2 ), B( 5 | 1 | 9 ) und C( 6 | 2 | 7 )

**a)** Geben Sie die Ebenengleichung von E an.

**b)** Für welches p liegt der Punkt R( p | 2 | -2 ) auf der Ebene.

**Lösungsvorschlag 7:**

Zu a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-0 \\ 9-2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6-3 \\ 2-0 \\ 7-2 \end{pmatrix}$ oder $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Zu b) Sei p so, dass der Punkt auf der Ebene liegt. Dann gibt es r und s mit:

$$\begin{pmatrix} p \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder } p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = +r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$. Damit gilt das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & & 2 \\ 7 & 5 & & -4 \end{array} \quad 7\cdot G2 - G3 \qquad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & & 2 \\ 0 & 9 & & 18 \end{array}$$

Rückwärts einsetzen ergibt nun:
G3: $s = 2$
G2: $r + 4 = 2$ oder $r = -2$
G1: $-4 + 6 - p = -3$ oder $p = 5$
Damit ist der Punkt genau dann auf E, wenn p den Wert 5 hat.

**Aufgabe 8**: [4P] Prüfen Sie, ob die beiden Geraden g und h sich schneiden. Geben Sie, falls möglich, eine Parametergleichung der Ebene E an, die eindeutig durch die Geraden g und h bestimmt ist.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösungsvorschlag 8**:
Sei S(x/y/z) ein Punkt, der auf beiden Geraden liegt. Dann gibt es Zahlen t und r

mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die letzte Gleichung ist ein LGS mit den Unbekannten t und r. $t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 3 & & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \quad G1 - G3 \qquad \text{oder} \quad \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 3 & & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad G2 - 3\cdot G3 \qquad \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 3 & & 3 \\ & & \end{array}$$

Wir haben also nur zwei unabhängige Gleichungen. Rückwärts einsetzen ergibt
G2: $t = 1$
G1: $2 - r = 2$ oder $r = 0$
Der Schnittpunkt ergibt sich mit $r = 0$ zu S(3/4/3)

Wir wählen diesen Punkt als Stützpunkt und die Richtungsvektoren der beiden Geraden als Spannvektoren. Wir erhalten als Ebene E

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9**: [3P] Auf einem Hof sind Enten, Hühner und Kaninchen mit zusammen 120 Füßen und 36 Köpfen. Es sind doppelt so viele Hühner wie Enten.
Wie viele Enten, Hühner und Kaninchen sind es?

**Lösungsvorschlag 9**: Es gibt e Enten, h Hühner und k Kanichen. Damit gilt

G1: $2e+2h+4k=120$ oder $e+h+2k=60$
G2: $e+h+k=36$
G3: $h=2e$ oder $2e-h=0$
Das LGS lautet also

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 60 \\ 1 & 1 & 1 & 36 \\ 2 & -1 & & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ G1-G2 \\ 2\cdot G1-G3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 4 & 120 \end{array}$$

Rückwärts einsetzen ergibt:
G2: $k = 24$
G3: $3h + 96 = 120$ oder $3h = 24$ oder $h = 8$
G1: $e + 8 + 48 = 60$ oder $e = 4$
Damit leben 4 Enten, 8 Hühner und 24 Kaninchen auf dem Bauernhof.

**Beschreibenden Text nicht vergessen.**

A4: als S. 217 Nr. 4a, 4b
A6: alt S. 221 Nr. 11d
A7: Alt S. 248 Nr. 4a, b(3)
A8: Alt S. 249 Nr. 12a
A9: Alt s. 230 Nr. 18a