## Pflichtteil (etwa 40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

**(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der TR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen.)**

**Es ist sinnvoll, klar und erkennbar zu gliedern**.
**Fehlt erklärender Text, wird etwas abgezogen, der Text darf aber kurz sein.**

**Aufgabe 1**: Leiten Sie ab und vereinfachen Sie gegebenenfalls (denken Sie an die Produktregel, die Kettenregel und an das Umformen der Funktionen vor dem Ableiten)

a) [2P] $f(x)=\sin(3x^2)$

b) [2P] $f(x)=\sqrt{6x^3}+x\cos(x)$

c) [2P] $f(x)=x\left(2-4\sqrt{x}\right)^4$

d) [2P] $f(x)=\dfrac{14x^3+2\sqrt{x}-3x}{7x}$

**Lösungsvorschlag 1**:

a) Mit der Kettenregel ergibt sich: $f'(x)=\cos\left(3x^2\right)\cdot 6x=6x\cdot\cos\left(3x^2\right)$

b) Beide Summanden einzeln ableiten und beim ersten die Kettenregel verwenden, beim zweiten die Produktregel:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6x^3}}\cdot 18x^2+\cos(x)-x\sin(x)=\frac{9x^2}{\sqrt{6}\cdot x^{\frac{3}{2}}}+\cos(x)-x\sin(x)=$$

$$\frac{9}{\sqrt{6}}\sqrt{x}+\cos(x)-x\sin(x)=\frac{3}{2}\sqrt{6x}+\cos(x)-x\sin(x)$$

c) Hier benötigen wir zuerst die Produktregel und dann - bei der Ableitung des zweiten Faktors – die Kettenregel. Wir müssen dabei nur den Term in der Klammer ableiten, dabei benutzen wir (ohne Umformung): $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ .

$$f'(x)=(x)'\cdot\left(\left(2-4\sqrt{x}\right)^4\right)+(x)\cdot\left(\left(2-4\sqrt{x}\right)^4\right)' \quad \text{Produktregel anwenden}$$

$$=1\left(2-4\sqrt{x}\right)^4+x\cdot\left[4\left(2-4\sqrt{x}\right)^3\cdot\left(\text{innere Ableitung von }\left(2-4\sqrt{x}\right)\right)\right]$$

$$=\left(2-4\sqrt{x}\right)^4+4x\left(2-4\sqrt{x}\right)^3\cdot\left(-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\left(2-4\sqrt{x}\right)^4-\frac{8x}{\sqrt{x}}\left(2-4\sqrt{x}\right)^3$$

$$=\left(2-4\sqrt{x}\right)^4-8\cdot\sqrt{x}\cdot\left(2-4\sqrt{x}\right)^3$$

Die letzte Zeile kann man noch vereinfachen (war nicht verlangt)

$$f'(x)=\left(2-4\sqrt{x}\right)^3\left[2-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}\right]=\left(2-4\sqrt{x}\right)^3\left(2-12\sqrt{x}\right)$$

d) Wir formen die Funktion f um, bevor wir ableiten:

$$f(x)=\frac{14x^3}{7x}+\frac{2\sqrt{x}}{7x}-\frac{3x}{7x}=2x^2+\frac{2}{7}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{7}$$

$$f'(x)=4x+\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=4x-\frac{1}{7\sqrt{x^3}}$$

**Aufgabe 2**: [4P] Bestimmen Sie die Extrema und die Wendepunkte von

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-3x^2+2$$

Die Funktionswerte der Wendepunkte sind nicht auszurechnen.

**Lösungsvorschlag 2**: Es ist sinnvoll, klar und erkennbar zu gliedern.

MERKE: Wichtig ist das **Verständnis für notwendig und hinreichend** – das ist keinesfalls allen klar! (Das Schulschema für Extrema soll dabei helfen): Kurz: Mit einer notwendigen Bedingung grenzt man die zu untersuchenden Punkte ein, die dann mit der hinreichenden Bedingung genauer untersucht werden.

**Notwendige Bedingung**: Wenn eine Aussage gilt, dann muss die notwendige Bedingung erfüllt sein.

Wenn das, was man sucht, gilt - also in x ein Extremum ist -, dann muss die notwendige Bedingung gelten. Anders formuliert: Wenn also für ein x die notwendige Bedingung falsch ist, dann ist in diesem Punkt z.B. kein Extremum.

Nochmals: Wenn in x ein Extremum vorliegt, dann muss die Ableitung Null sein – konkret: alle Punkt, die keine Nullstellen der Ableitung sind, sind also keine Extrema. Wir schließen mit einer notwendigen Bedingung die Punkte, die wir genauer untersuchen müssen stark ein: Alle Punkte, deren Ableitungen nicht Null sind, sind keine Extrema.

Die Nullstellen der Ableitung werden anschließend mit der hinreichenden Bedingung einzeln untersucht.

**Hinreichende Bedingung**: Wenn eine Aussage die hinreichende Bedingung erfüllt, dann ist die Aussage richtig. Wenn die zweite Ableitung an einer Stelle kleiner Null ist, dann liegt ein Maximum vor. Wenn die zweite Ableitung Null ist, dann können wir nicht aussagen! Dann müssen wir anderweitig untersuchen, ob ein Extremum vorliegt (siehe Aufgabe 3a).

a) **Ableitungen:**

$$f'(x)=x^3-x^2-6x$$

$$f''(x)=3x^2-2x-6$$

$$f'''(x)=6x-2$$

b) **Notwendige Bedingung für Extrema**: Sei x ein Extremum, dann ist die Ableitung an dieser Stelle Null. Also gilt für dieses x gilt:

$x^3-x^2-6x=0$ / x ausklammern

$x\left(x^2-x-6\right)=0$

Damit ist entweder x = 0 oder

$x^2-x-6=0$ MNF

$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}=3/-2$$

Damit müssen wir nur noch die drei Stellen x = 0, 3, und -2 genauer untersuchen.

c) **Hinreichende Bedingungen der möglichen Extrema (d.h. der Nullstellen von f‘(x)):** (beachte die Mehrzahl „Bedingungen“ – jedes mögliche Extremum muss separat untersucht werden!!!) für die drei möglichen Extrema:
$f''(0) = -6 < 0$ Hier liegt also ein Maximum vor.
$f''(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 6 = 27 - 12 > 0$ Also liegt hier ein Minimum vor.
$f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 6 = 12 + 4 - 6 > 0$ Damit gibt es hier ebenfalls ein Minimum.

d) **Angabe der Extrema**:
Für x = 0 gilt: $f(0) = 2$, HP(0/2)
Für x = 3 gilt:
$$f(3) = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{3}3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 = \frac{81}{4} - 9 - 27 + 2 = 22{,}25 - 36 = -13{,}75$$
Also TP(3/-13,75)
Für x = -2 gilt:
$$f(-2) = \frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{3}2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 4 + \frac{8}{3} - 12 + 2 = 8\frac{2}{3} - 12 = -3\frac{1}{3}$$
Also TP(-2/-3,33)

e) **Notwendige Bedingung für WP**: f‘‘(x)=0
Wenn x ein WP ist, dann gilt
$3x^2 - 2x - 6 = 0$ / MNF
$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$$
Damit kommen nur zwei Punkte als WP in Frage.

f) **Hinreichende Bedingungen für die möglichen WPe**: (beachte wieder die Mehrzahl,)
$$f'''(x) = 6\frac{1 \pm \sqrt{19}}{3} - 2 = 2\left(1 \pm \sqrt{19}\right) - 2 = \pm\sqrt{19} \neq 0$$
Wer will kann noch notieren, dass bei $\frac{1+\sqrt{19}}{3}$ eine Rechts- in eine Linkskurve übergeht, bei $\frac{1-\sqrt{19}}{3}$, eine Links- in eine Rechtskurve.
(Eigentlich ist das klar, da ja die Kurve von einem Tiefpunkt immer stärker ansteigt, also eine Linkskurve ist).

g) **Die Koordinaten der beiden WP** sind damit
$$WP1\left(\frac{1+\sqrt{19}}{3} / f\left(\frac{1+\sqrt{19}}{3}\right)\right) \text{ und } WP1\left(\frac{1-\sqrt{19}}{3} / f\left(\frac{1-\sqrt{19}}{3}\right)\right)$$
Die Werte genauer zu bestimmen macht wenig Sinn, wenn man die Funktionsdefinition ansieht.

ANMERKUNG: Die Funktion kann man jetzt übrigens einfach zeichnen, was aber nicht verlangt war. Einfach die Extrema und die Wendepunkte einzeichnen. Oft wird auch noch verlangt, dass man davor die Nullstellen bestimmt. Das ist bei dieser Funktion aber (zumindest in der Schule) nicht möglich.

**Aufgabe 3**: [3P]

a) [2P] Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x + \cos(x)$.
Bestimmen Sie die Extrema im Bereich $0 \le x \le 2\pi$.

b) [2P] Geben Sie eine Funktion an, für die gilt:
$f'(x) < 0$ für $x < 3$ und $f'(x) > 0$ für $x > 3$

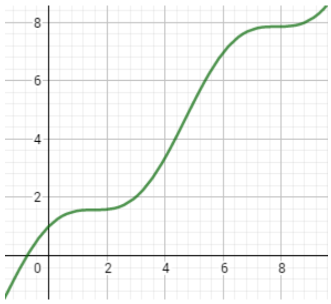
**Lösungsvorschlag 3**:

zu a) Die Ableitungen von f sind: $f'(x) = 1 - \sin(x)$ und $f''(x) = -\cos(x)$

Sei x ein Extremum: Es gilt: $f'(x) = 1 - \sin(x) = 0$, d.h. $\sin(x) = 1$, d.h. $x = \frac{\pi}{2}$

Notwendige Bedingung: $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D.h., wir können nicht entscheiden!

Wir müssen jetzt z.B. direkt die erste Ableitung untersuchen. Findet bei $x = \frac{\pi}{2}$ ein Vorzeichenwechsel stattfindet? Wenn dies nicht der Fall ist, haben wir einen Sattelpunkt. Da $sin(x) \le 1$ für alle x ist, ist $f'(x) = 1 - \sin(x) \ge 0$ für alle x. Also ist $x = \frac{\pi}{2}$ ein Sattelpunkt.




Wir können die Funktion zeichnen, dann sehen wir dies deutlich.

VARANTE: betrachte f‘‘‘(x)=sin(x) hat bei $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert 1. Also liegt ein Wendepunkt vor, d.h. $x = \frac{\pi}{2}$ ist eine Sattelpunkt-

zu b) Die Funktion muss links von x fallen, rechts davon steigen. Damit können wir f als nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel bei x=3 wählen. Also $f(x) = (x-3)^2$ oder $f(x) = (x-3)^4 + 5$ oder …

# Wahlteil (etwa 40 min) – **Mit TR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der TR und die Formelsammlung verwendet werden.**

**Aufgabe 4** [4P] Eine oben offene Kiste mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass bei einem Volumen von V=32 Liter die Oberfläche möglichst klein wird. Wie sind die Maße der Kiste zu wählen?

**Lösungsvorschlag 4**:

(Evtl. skizziert man hier eine Kiste)

Wenn die Seitenlänge des Bodenquadrates x und die Höhe der Kiste y ist, so ergibt sich für das Volumen $V = x^2 y = 32$ (alle Einheiten in dm) und für die Oberfläche $A = x^2 + 4xy$

Da wir die Fläche minimieren sollen, müssen wir in A eine der beiden Variablen ersetzen. Die Gleichung mit V ergibt $y = \frac{32}{x^2}$. Damit erhalten wir folgende Funktion:

$$f: \quad \text{Seitenlänge in dm} \quad \to \quad \text{Oberfläche}$$

$$x \quad \mapsto \quad 4 \cdot \frac{32}{x} = x^2 + \frac{128}{x}$$

Für die Ableitungen von f gilt: $f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$ und $f''(x) = 2 + \frac{256}{x^3}$

**Notwendige Bedingung**: Sei x eine Nullstelle von f‘, dann gilt: $2x^3 = 128$ oder $x^3 = 64 = 2^6$. Damit kommt als einziges Minimum $x = 2^2 = 4$ in Frage. Diese Stelle muss man nun mit einer hinreichenden Bedingung genauer untersuchen.

**Hinreichende Bedingung**: Für das mögliche Minimum müssen wir jetzt die 2. Ableitung berechnen. Es ist $f''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} > 0$. Also sagt uns die hinreichende Bedingung, dass x = 4 ein Minimum ist.

Die Oberfläche berechnet sich zu $f(4) = 16 + 4 \cdot \frac{32}{4} = 48$.

Der Antwortsatz im Heft ist dann etwa:

Die Kiste vom Volumen V=32 dm hat eine minimale Oberfläche, wenn die Seitenkante des Bodenquadrats x = 4 dm beträgt und die Höhe $y = 2$ dm ist. (Die Oberfläche ist dann O = 48 dm^3).

**Anmerkung**: Der sich ergebende Körper ist ein durchgeschnittener Würfel. Wie in der Ebene ein Quadrat bei gegebenem Umfang die kleinste Fläche hat, so hat ein Würfel bei gegebenen Volumen die kleinste Oberfläche. Wenn wir ihn halbieren, erhalten wir einen oben offenen Körper mit der kleinsten Fläche bei gegebenem Volumen.

**Aufgabe 5**: [5P] Eine Elektronikfirma verkauft monatlich 5000 Stück eines Bauteils zum Stückpreis von 25€. Die Marktforschungsabteilung der Firma hat festgestellt, dass sich der durchschnittliche monatliche Absatz bei jeder Stückpreissenkung von 1 € um jeweils 300 Stück erhöhen würde. Bei welchem Stückpreis sind die monatlichen Einnahmen am größten? Wie groß sind sie dann?

**Lösungsvorschlag 5**:

**Man muss sich das Folgende zumindest klar machen**:
Gesucht ist die Stückpreissenkung, die die größten Einnahmen bringt. Dieses Problem löseen wir mit der Funktion, die einer Ermäßigung um x € die Einnahmen zuordnet. Die Einnahmen sind ein Produkt aus Preis pro Stück und Anzahl der verkauften Teile.

**Sinnvollerweise steht im Heft**: Bei einer Ermäßigung von x (in €) ist der Verkaufspreis 25-x. Es werden dann 5000+x*300 Stück verkauft.

**Im Heft** sollte jetzt auf alle Fälle stehen.

$$f: \text{ Ermäßigung in €} \rightarrow \text{Einnahmen}$$
$$x \mapsto x)\cdot(5000+300x)$$

Es gilt $f(x)=125000+7500x-5000x-300x^2=-300x^2+2500x+125000$

Also ist f(x) eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wissen wir, dass ein Extremum immer ein Maximum ist, es ist der Scheitel.

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist f‘(x)=0.
Da $f'(x)=-600x+2500$ muss also im Minimum gelten: $-600x+2500=0$
oder $x=\frac{2500}{600}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}=4{,}16$

Da die Funktion eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist dies ein Maximum. (Oder: $f''(x)=-600$, damit ist sicher $f''(4{,}16)<0$)

Damit ergibt sich, dass beim Stückpreis von etwa 20,80 € die monatlichen Einnahmen mit etwa 130 000 € am größten sind.

**Nochmals**: Mit der notwendigen Bedingung werden die Stellen, die man genauer untersuchen muss, sehr stark eingeschränkt. Wenn nämlich bei einer Stelle die Ableitung nicht Null ist, so ist dies kein Extremum.
Mit der hinreichenden Bedingung untersucht man anschließend diese Stellen, die möglicherweise Extrema sind, genauer.

**Aufgabe 6** Bestimmen Sie die Punkte, in denen die Tangente der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

a) [2P] parallel zur Geraden $y=2x+3$ ist, bzw.
b) [3P] durch den Punkt (2/-8)) geht.

Geben Sie die Tangentengleichungen jeweils an.

**Lösungsvorschlag 6**:

Die Tangente im Punkt a ist wegen $f'(x)=x$

$$t(x)=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2-2=ax-\left(\frac{1}{2}a^2+2\right)$$

Zu a) Wenn die Tangente parallel zur Geraden $y = 2x + 3$ ist, dann muss die Steigung der Tangente m = 2 sein. Also ist a = 2. (Parallele Geraden haben dieselbe Steigung und wenn Geraden dieselbe Steigung haben, sind sie parallel – das sind verschiedene Dinge, wirklich!)
Damit lautet die Tangente im Punkt $P(2\,|\,0)$ $t(x) = 2x - 4$

Zu b) Wenn die Tangente im Punkt a durch den Punkt (2/-8) geht, dann liegt dieser Punkt auf der Tangente. Also gilt: $t(2) = a \cdot 2 - \left(\frac{1}{2}a^2 + 2\right) = -8$

Diese Gleichung müssen wir nach a auflösen:

$a \cdot 2 - \frac{1}{2}a^2 - 2 + 8 = 0$ oder nach Multiplikation mit (-2) und Umordnen

$a^2 - 4a - 12 = 0$ Die MNF liefert als Lösungen

$a_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$ also $a_1 = 6$ und $a_2 = -2$

Damit sind die Punkte, deren Tangenten durch P(2/-8) gehen, die beiden Punkte $Q_1(6/16)$ und $Q_2(-2/0)$

Die Tangenten sind in den Punkten sind $t_1(x) = 6 \cdot x - 20$ bzw. $t_2(x) = -2 \cdot x - 4$

ANMERKUNG: Durch jeden Punkt außerhalb der Parabel kann man genau zwei Tangenten ziehen, siehe z.B.: Folgenden Graphen