Pflichtteil (etwa 30..40 min) – Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung

(Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen. Die Aufgaben des Wahlteils müssen auf einem eigenen Blatt stehen, dürfen aber begonnen werden, ehe der Pflichtteil abgegeben ist – allerdings kann dann dabei noch kein GTR verwendet werden.)

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Leiten Sie ab und vereinfachen Sie gegebenenfalls

a) [2P] $f(x)=\sqrt{ax^2-3a^2}$ b) [2P] $g(x)=\dfrac{\sin(4x)}{x^2-1}$

c) [2P] $h(x)=\dfrac{2}{x^2}\sqrt{3x^4+2x}$ d) [2P] $k(x)=\dfrac{3x^2-4x+2\sqrt{x}}{3x}$

Lösungen 1:

a) Um die Ableitung von $f(x)=\sqrt{ax^2-3a^2}$ zu bestimmen, benötigen wir die Kettenregel (Die äußere Funktion ist die Wurzel, die innere der Radikand, d.h. der Term unter der Wurzel – beachte dabei, dass nach x abgeleitet wird, nicht nach a)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{ax^2-3a^2}}\cdot 2ax=\frac{ax}{\sqrt{ax^2-3a^2}}$$

Bemerkung 1: Das, was man dabei zum Vereinfachen an Regeln einsetzen kann, ist lediglich: $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$ und das Kürzen. Beides sollte man aber anwenden!

Bemerkung 2: Oft ist wichtig, zu wissen, was **nicht** geht, was verboten ist, was nicht erlaubt ist!
Was **nicht** geht, merkt man sich leicht als Ungleichung: $\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$. Also kann man die Wurzel vor dem Ableiten nicht abschaffen. Um das zu verstehen, denkt man etwa an Pythagoras: $5=\sqrt{25}=\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$. Es gilt $\sqrt{16}+\sqrt{9}>\sqrt{16+9}$.
Allerdings gilt $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ Für die Multiplikation gelten also andere Dinge wie für die Addition!
Wurzeln (und Potenzen, Wurzeln sind ja Potenzen!) kann man bei Multiplikationen umformen, aber nicht bei Additionen. Das liegt an der Bedeutung der Wurzel: Eine Wurzel, z.B. $\sqrt{c}$, ist die Zahl, deren Quadrat (also die Multiplikation mit sich selbst – deshalb sind Multiplikation einfach) der Radikand ist. Es gilt $\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}=c$. Wenn ich jetzt die Zahl $\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}$ betrachte, so gilt für sie $\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}=cd$, also ist $\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}=\sqrt{cd}$. Wenn ich aber $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ habe, dann gilt dafür aufgrund der ersten Binomischen Formel $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\neq a+b$, es gilt nämlich $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\neq a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Also ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (Dies liegt an

dem Summanden $2\sqrt{a}\sqrt{b}$, der beim Quadrat von $\sqrt{a+b}$ fehlt, ein konkretes Beispiel steht oben.)

b) Wenn wir die Ableitung von $g(x)=\frac{\sin(4x)}{x^2-1}$ bestimmen wollen, müssen wir den Term zuerst umformen. $g(x)=\frac{\sin(4x)}{x^2-1}=\sin(4x)\cdot\left(x^2-1\right)^{-1}$ – und beim Ableiten benötigen wir dann die Produktregel und zweimal die Kettenregel (einmal ist die äußere Funktion sin, die innere 4x, das andere Mal ist die äußere Funktion x^{-1} und die innere x^2-1), also gilt:

$$g'(x)=\left(\cos(4x)\cdot 4\right)\cdot\left(x^2-1\right)^{-1}+\sin(4x)\cdot\left(-1\cdot\left(x^2-1\right)^{-2}\cdot 2x\right)=$$

$$\frac{4\cdot\cos(4x)}{x^2-1}-\frac{2x\cdot\sin(4x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Bemerkungen: Hier könnte man auch die Quotientenregel benutzen.

c) Um die Ableitung von $h(x)=\frac{2}{x^2}\sqrt{3x^4+2x}$ zu bestimmen, formen wir wieder um ($\frac{2}{x^2}=2\cdot x^{-2}$) und benutzen dann die Produktregel. Um die Wurzel abzuleiten, benötigen wir immer zusätzlich die Kettenregel.

$$h(x)=2\cdot x^{-2}\sqrt{3x^4+2x}$$

$$h'(x)=-4x^{-3}\cdot\sqrt{3x^4+2x}+2x^{-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x^4+2x}}\cdot(12x^3+2)=$$

$$=\frac{-4\sqrt{3x^4+2x}}{x^3}+\frac{12x^3+2}{x^2\sqrt{3x^4+2x}}$$

d) Wenn wir $k(x)=\frac{3x^2-4x+2\sqrt{x}}{3x}$ ableiten wollen, sollten wir den Term vor dem Ableiten in Summanden zerlegen (Die Quotientenregel ist viel komplizierter!): $k(x)=\frac{3x^2}{3x}-\frac{4x}{3x}+\frac{2\sqrt{x}}{3x}=x-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$. Damit ergibt sich die Ableitung ganz einfach. (Diesen Trick können wir oft sinnvoll einsetzen!) Dann gilt:

$$k'(x)=1+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Bemerkungen: Die Umformung des Bruches ist fast nur „einfache" Bruchrechnung – allerdings auch ein wenig Potenzrechnung wegen:

$$\frac{2\sqrt{x}}{3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1}=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Wer will kann allerdings bei der letzten Umformung auch mit Wurzeln argumentieren: $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Generell kann man alle Wurzel-Umformungen durch Potenz-Umformungen ersetzen.

Aufgabe 2: Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f(x)=\frac{3x^2-2x-2}{x}$ im Punkt Q(2/?).

Bestimmen Sie die Nullstelle der Tangente.

Lösungen 2: Die Tangentengleichung an f in a=2 ist $t(x)=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$

a=2

$$f(2)=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2-2}{2}=3$$

Vor dem Ableiten formen wir um: $f(x)=\frac{3x^2-2x-2}{x}=3x-2-2x^{-1}$

also $f'(x)=3+2x^{-2}=3+\frac{2}{x^2}$ und damit ist $f'(2)=3+\frac{2}{4}=3\frac{1}{2}$

Also ist die Gleichung der Tangente: $t(x)=\frac{7}{2}\cdot(x-2)+3=\frac{7}{2}x-7+3=\frac{7}{2}x-4$

Die Nullstelle der Tangente: Sei x eine Nullstelle, dann gilt: $t(x)=\frac{7}{2}x-4=0$

Lösen wir die zweite Gleichung nach x auf, erhalten wir: $x=\frac{2}{7}\cdot 4=\frac{8}{7}$

Aufgabe 3: [3P] Wie lautet die Normalengleichung an $f(x)=\frac{4x^4-3x}{3x^2}$ im Punkt P(1|f(1))

Zusatzinfo: Die Normale ist die Gerade, die senkrecht auf der Tangente steht, also die Steigung -1/f'(a) hat. Die Gleichung ist also $n(x)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$

Lösungen 3: : Die Normalengleichung an f in a=1 ist $n(x)=\frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a)+f(a)$

Es gilt a=1,

$f(1)=\frac{4\cdot 1^4-3\bullet}{3\cdot 1^2}$ 3

Vor dem Ableiten formen wir um: $f(x)=\frac{4x^4-3x}{3x^2}=\frac{4}{3}x^2-x^{-1}$ also ist

$f'(x)=\frac{8}{3}x+\frac{1}{x^2}$ und damit $f'(1)=\frac{8}{3}\cdot 1+\frac{1}{1^2}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$

Damit ist die Gleichung der Normalen:

$$n(x)=\frac{-3}{11}\cdot(x-1)+\frac{1}{3}=-\frac{3}{11}x+\frac{3}{11}+\frac{1}{3}=-\frac{3}{11}x+\frac{9+11}{33}=-\frac{3}{11}x+\frac{20}{33}$$

Wahlteil (etwa 45..55 min) – **Mit GTR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der GTR und die Formelsammlung verwendet werden. Die Lösungen dieser Aufgaben müssen auf einem eigenen Lösungsblatt stehen.**

Aufgabe 4: [4P] Bestimmen Sie die Punkte der Funktion $f(x)=\frac{5}{2}x^2-2\frac{1}{5}$, in denen die Normale durch den Ursprung (0/0) geht.
(**Tipp**: Tpyisches mathematisches Vorgehen: Sei a der x-Wert des Punktes, bei dem die Normale durch den Ursprung geht. Stellen Sie die Normalengleichung auf und nutzen Sie nun aus, dass der Ursprung auf der Normale liegt. Dies ergibt eine Gleichung, die nur noch a enthält. Bestimmen Sie nun a.
Jetzt wissen wir: Wenn es eine Stelle gibt, dessen Normale durch duch den Ursprung geht, so kommt nur a = … in Frage.)

Lösung 4: Sei a ein Punkt, in dem die Normale durch den Ursprung geht, dann gilt: Der Punkt (0/0) liegt auf der Normalen $n(x)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$, d.h. n(0)=0.
Um die Normale in a zu bestimmen, benötigen wir die Ableitung $f'(x)=5x$
Damit ist die Normale in a:

$$n(x)=-\frac{1}{5a}(x-a)+\frac{5}{2}a^2-2\frac{1}{5}=-\frac{1}{5a}x+\frac{1}{5}+\frac{5}{2}a^2-2\frac{1}{5}=-\frac{1}{5a}x+\frac{5}{2}a^2-2$$

Da sie durch den Ursprung geht, gilt wegen n(0)=0: $-\frac{1}{5a}0+\frac{5}{2}a^2-2=0$ Oder $\frac{5}{2}a^2=2$ oder $a^2=\frac{4}{5}$. Somit kann nur in den Punkten mit

$x_{1/2}=a_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}=\pm 0.894$ eine solche Normale existieren. Wie man durch Einsetzen leicht zeigen kann, erfüllen diese x-Werte die Forderung auch.

Bemerkung: Es ist wichtig, zwischen dem Punkt (a/f(a)), an dem die Tangente die Funktion berüht oder die Normale die Funktion senkrecht schneidet und der Funktionsvariable der Tangente bzw. der Normale, nämlich x, zu unterscheiden. Ein Gerade kann nur ein x enthalten, kein x^2 oder sonst eine Potenz von x. Außer dem x aber dürfen andere Variable beliebiger Art vorkommen, auch quadratisch oder als Wurzel, sie sind durch die Funktion bestimmt.
Viele erfolgreiche Verfahren der Mathematik beginnen mit einer Annahme (so wie hier: Nehmen wir an, dass die Normale in a durch den Ursprung geht). Entweder folgt daraus, dass nur bestimmte Werte als Lösungen in Frage kommen, die man dann weiter untersuchen muss (das was man aus der Annahme gefolgert hat, nennt man dann

notwendigen Bedingung für die Lösung – wenn es eine Lösung gibt, dann muss dies „notwendigerweise" gelten.)
Oder es folgt aus einer Annahme ein Widerspruch, etwas Unsinniges, etwas was eindeutig falsch ist. In diesem Fall kann man feststellen, dass die Annahme falsch war. Man redet jetzt von einem Widerspruchsbeweis. Die Annahme, die man dabei macht, ist immer das Gegenteil der Aussage, die man beweisen möchte.

Aufgabe 5 [5P] Eine oben offene Kiste mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass bei einem Volumen von V=62,5 l die Oberfläche möglichst klein wird. Wie sind die Maße der Kiste zu wählen?
(Tipp: Stellen Sie sich die Kiste vor, skizzieren Sie sie, durch welche Größe wird sie beschrieben? Was soll extremal werden? Wovon hängt diese Größe ab? Es sind zu viele Variablen, wie lässt sich eine entfernen? Denken Sie an V.)

Lösung 5: Die Größe, die minimiert werden soll, ist die Oberfläche. Die Oberfläche wird durch zwei Größen bestimmt, durch die Seitenlänge a des quadratischen Bodens und durch die Höhe h. Da das Volumen in Liter, also in dm^3 gegeben ist, wählen wir dm als Einheit von a und h.

Wenn wir ganz formal vorgehen (was in der KA nicht verlangt war), haben wir jetzt eine Funktion die jeweils einem Paar von Variablen eine Oberfläche zuordnet, nämlich:

$$f_2: \quad \text{Längen in dm} \rightarrow \text{Oberfläche in dm}^2$$
$$(a,h) \mapsto a^2 + 4ah$$

Mit Hilfe der Nebenbedingung bekommen wir nun eine Gleichung, mit deren Hilfe wir die Variable h durch die Variable a ausdrücken. Dadurch erhalten wir eine Funktion, die jedem a die passende Oberfläche zuordnet.

Die Nebenbedingung, besagt, dass das Volumen $V = a^2h$ stets 62,5 betragen soll. Damit ist $h = \frac{62,5}{a^2}$, wenn wir a vorgeben. Dies ermöglicht uns, h in der obigen Funktion durch a auszudrücken, so, dass wir eine Funktion f erhalten, die jedem a die Oberfläche zuordnet, die zum Volumen V=62,5 gehört.

$$f: \quad \text{Länge in dm} \rightarrow \text{Volumen in dm}^3$$
$$a \mapsto 4a\frac{62,5}{a^2} = a^2 + \frac{250}{a}$$

Wenn in a ein Extremum vorliegt, dann ist f'(a)=0. Wir bestimmen also die Ableitung von f. sie ist $f'(a) = 2a - \frac{250}{a^2}$

Um das a zu bestimmen, in dem ein Extremum vorliegt (genauer, um eine notwendige Bedingung für a zu erhalten), nehmen wir an, dass a ein Extremum ist. Dann gilt: $f'(a) = 2a - \frac{250}{a^2} = 0$. Lösen wir diese Gleichung nach a auf, erhalten wir $2a = \frac{250}{a^2}$ oder $a^3 = \frac{250}{2} = 125$ oder $a = 5$. Wir wissen damit, dass nur in a lokales Extremum vorliegen kann.

Setzen wir diese mögliche Lösung in die zweite Ableitung von f, nämlich in $f''(a) = 2 + \frac{500}{a^3}$ ein, erhalten wir $f''(5) = 2 + \frac{500}{125} = 6 > 0$. Damit ist a=5 ein lokales Minimum.

Wenn a=5 ist, so ergibt sich $h = \frac{62,5}{a^2} = \frac{62,5}{5^2} = 2,5$.

Wenn man also die Quadratseite a=5 dm und die Höhe h=2,5 dm wählt, so ist die Oberfläche einer oben offenen Kiste mit dem Volumen 62,5 dm^3 minimal.

Bemerkung: Eigentlich müssen wir auch noch die Randwerte untersuchen, auch wenn das hier nicht verlangt war, da wir es im Unterricht bisher nur am Rande angesprochen haben. Eine Funktion kann nur in einem lokalen Minimum oder am Rand des Definitionsbereichs ein globales Minimum annehmen. An den Rändern aber kann kein Minimum vorliegen, denn: Die Funktion f ist für alle positiven Zahlen definiert und die Funktion links von 5 fällt und rechts davon ansteigt, kann die Funktion an keinem Wert kleiner sein als im Minimum. Wir müssen also hier nicht noch zusätzlich überlegen, welche Werte a annehmen kann, ohne dass h negativ wird.)

Aufgabe 6: [6P] Ein geplanter Tunnel hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Vom Architekt wird gefordert, die Querschnittsfläche möglichst groß zu machen, wobei der Umfang aufgrund der Kosten für die Wandfläche genau 32 m betragen soll. Können LKWs mit der Höhe 4,2 m in der Mitte durch den Tunnel fahren, wenn der Architekt die Angaben des Bauherrn erfüllt?
(Tipp: Was soll extremal werden? Skizzieren Sie, möglichst im Heft. Wovon hängt diese Größe ab? Wie lassen sich eine bzw. zwei Größen (je nach Wahl) eliminieren? Erst jetzt können Sie bestimmen, wie groß die Höhe ist.)

Lösung 6: Die Größe, die maximiert werden soll, ist die Querschnittsfläche, die aus einem Rechteck und einem Halbkreis besteht. Die Fläche ist durch zwei Parameter bestimmt, durch den Radius r des Halbkreises und durch die Seitenlängen 2r und h des Rechtecks. Es gilt also $(r,h) \mapsto \qquad \frac{1}{2}\pi r^2$. Die beiden Variablen hängen von einander ab, da der Umfang 32 m groß ist. Es gilt also: Zwei Seitenlinien + Bodenlinie + Halbkreis = $2h + 2r + \pi r = 32$ oder wenn wir diese Gleichung nach h auflösen $2h = 32 - (2+\pi)r$ oder $h = 16 - \frac{1}{2}(2+\pi)r$. Ersetzen wir damit in der obigen Funktion die Variable h, erhalten wir die Funktion f, deren Maximum die größte Fläche ist. Es gilt

$$f(r) = 2r\left(16 - \frac{1}{2}(2+\pi)r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 32r - (2+\pi)r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = 32r - \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right)r^2.$$

Sei nun r ein Extremum der Funktion, so ist die Ableitung Null, also gilt $f'(r) == 32 - 2\left(2 + \frac{1}{2}\pi\right)r = 32 - (4+\pi)r = 0$. Lösen wir diese Gleichung nach r auf, erhalten wir $(4+\pi)r = 32$ oder $r = \frac{32}{(4+\pi)} = 4,48$

Dies ist ein Maximum, da die zweite Ableitung von f, nämlich $f''(r) = -(4+\pi) < 0$ ist.
(Außerdem ist die Funktion f(r) eine nach unten geöffnete Parabel, so dass sie an den Randstellen eines eingeschränkten Definitionsbereichs sicher kleiner ist, wie im Scheitel.)
Für die Höhe h des Rechtecks gilt:
$$h = 16 - \frac{1}{2}(2+\pi)\frac{32}{4+\pi} = 16 - 16\frac{2+\pi}{4+\pi} = 16\left(1 - \frac{2+\pi}{4+\pi}\right) = 16\frac{4+\pi-2+\pi}{4+\pi} = \frac{32}{4+\pi} = 4{,}48\,.$$
Damit kann der Lastzug sicher durch den Tunnel fahren.