Pflichtteil (etwa 30..40 min) – **Ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung (Dieser Teil muss mit den Lösungen abgegeben sein, ehe der GTR und die Formalsammlung verwendet werden dürfen. Die Aufgaben des Wahlteils müssen auf einem eigenen Blatt stehen, dürfen aber begonnen werden, ehe der Pflichtteil abgegeben ist – allerdings kann dann dabei noch kein GTR verwendet werden.)**

Aufgabe 1: Leiten Sie ab und vereinfachen Sie gegebenenfalls (denken Sie an die Produktregel, die Kettenregel und an das Umformen der Funktionen vor dem Ableiten)

a) [2P] $f(x)=\sqrt{ax^2-3a^2}$ b) [2P] $g(x)=\dfrac{\sin(4x)}{x^2-1}$

c) [2P] $h(x)=\dfrac{2}{x^2}\sqrt{3x^4+2x}$ d) [2P] $k(x)=\dfrac{3x^2-4x+2\sqrt{x}}{3x}$

Aufgabe 2: [3P] Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-2}{x}$ im Punkt Q(2/?).
Bestimmen Sie die Nullstelle der Tangente.
(Vorsicht: f vor dem Ableiten umformen!)

Aufgabe 3: [3P] Wie lautet die Normalengleichung an $f(x)=\dfrac{4x^4-3x}{3x^2}$ im Punkt P(1|f(1))

Zusatzinfo: Die Normale ist die Gerade, die senkrecht auf der Tangente steht, also die Steigung -1/f'(a) hat. Die Gleichung ist also $n(x)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$

Wahlteil (etwa 45..55 min) – **Mit TR und Formelsammlung – nach Abgabe des Pflichtteils kann der TR und die Formelsammlung verwendet werden.**

Aufgabe 4: [4P] Bestimmen Sie die Punkte der Funktion $f(x)=\dfrac{5}{2}x^2-2\dfrac{1}{5}$, in denen die Normale durch den Ursprung (0/0) geht.
(**Tipp**: Tpyisches mathematisches Vorgehen: Sei a der x-Wert des Punktes, bei dem die Normale durch den Ursprung geht. Stelle Sie die Normalengleichung auf und nutzen Sie nun aus, dass der Ursprung auf der Normale liegt. Dies ergibt eine Gleichung, die nur noch a enthält. Bestimmen Sie nun a.
Jetzt wissen wir: Wenn es eine Stelle gibt, dessen Normale durch duch den Ursprung geht, so kommt nur a = … in Frage.)

Aufgabe 5 [5P] Eine oben offene Kiste mit quadratischer Grundfläche soll so hergestellt werden, dass bei einem Volumen von V=62,5 l die Oberfläche möglichst klein wird. Wie sind die Maße der Kiste zu wählen?
(Tipp: Stellen Sie sich die Kiste vor, skizzieren Sie sie, durch welche Größe wird sie beschrieben? Was soll extremal werden? Wovon hängt diese Größe ab? Es sind zu viele Variablen, wie lässt sich eine entfernen? Denken Sie an V.)

Aufgabe 6: [6P] Ein geplanter Tunnel hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Vom Architekt wird gefordert, die Querschnittsfläche möglichst groß zu machen, wobei der Umfang aufgrund der Kosten für die Wandfläche genau 32 m betragen soll. Können LKWs mit der Höhe 4,2 m in der Mitte durch den Tunnel fahren, wenn der Architekt die Angaben des Bauherrn erfüllt?
(Tipp: Was soll extremal werden? Skizzieren Sie, möglichst im Heft. Wovon hängt diese Größe ab? Wie lassen sich eine bzw. zwei Größen (je nach Wahl) eliminieren? Erst jetzt können Sie bestimmen, wie groß die Höhe ist.)

Die **Bedeutung der Ableitung** ist durch folgende Sachlage bestimmt:
Wenn man eine Funktion genauer anschaut, dann will man nicht nur einzelne Funktionswerte wissen (nromalerweise sogar gar nicht), sondern man will oft primär das Verhalten der Funktion in der Nähe eines Punktes wissen. Man will wissen, wie sich eine Funktion ändert. Konkreter: Man will wissen, ob sich die Funktionswerte nahe des Punktes a schnell oder langsam ändern, ob die Funktion steil oder flach ist oder ob ein Extremum vorliegt. Die Ableitung bestimmt diese **lokale Eigenschaft**. Sie liefert die Steigung. Die Steigung ist keine Eigenschaft eines Punktes, sondern einer Umgebung. Dies sieht man auch schön in der Landschaft, die Höhe eines Berghangs ist oft weniger wichtig, wie die Steigung.

Außerdem es ist folgende Tatsache wichtig. Die (in der Schule untersuchten differenzierbaren) Funktionen verhalten sich in der Nähe von a fast so wie die Tangente. Also kann man die Funktion durch die Tangente in a ersetzen, wenn nur die Umgebung von a eine Rolle spielt. Die Tangente ist aber allein durch die Ableitung in a und den Funktionswert in a bestimmt. Herr Newton, der „olle Physiker“, hat dies sinnvoll eingesetzt: Als er mal die Nullstelle einer Funktion nicht bestimmen konnte, hat er eine Schätzung der Nullstelle verbessert, indem er die Funktion durch die Tangente ersetzt hat und die Nullstelle der Tangente bestimmt hat. Dieser Trick heißt heute Newtonverfahren.

Zusatz: Wir wollen die positive Nullstelle der Funktion $f(x)=x^2-3$ berechnen.

1) Vorbemerkung: Zeige, dass die Nullstelle den Wert $\sqrt{3}=1,732$ hat.
2) Wir nehmen an, dass die Nullstelle nahe x=2 ist.
3) Bestimme die Tangente an f im Punkt a=2
4) Berechne die Nullstelle dieser Tangente. (Ergebnis: x=1,75)
5) Wiederhole die Schritte 2 bis 4 für x=1,75 (Ergebnis x=45/28)
6) Wiederhole die Schritte 2 bis 4 nochmals für den neuen Wert (Ergebnis 1,737)