B Grundbegriffe zu Mengen und Abbildungen

Die Sprache der Mengen und Abbildungen hat sich als Basissprache in der modernen Mathematik durchgesetzt. Da sie sehr praktisch ist, wird sie auch in diesem Buch an vielen Stellen verwendet. Daher werden hier die wichtigsten Begriffe zusammengetragen.

Mengen und Elemente

Eine **Menge** ist eine Ansammlung von Objekten, ihrer **Elemente,** wobei nur zählt, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht. Das heißt, dasselbe Element kann nicht mehrfach zu einer Menge gehören, und auf die Reihenfolge kommt es nicht an. Die Elemente werden zwischen den Klammern $\{$ und $\}$ aufgelistet.

Zum Beispiel sind $\{1,2\}$ und $\{5,8,9\}$ Mengen. Es ist $\{1,2\} = \{2,1\}$ und $\{1,1,2\} = \{1,2\}$. (Vertauschung und Mehrfachnennung sind erlaubt, ändern aber nichts.)

Liegt ein Element in einer Menge, schreiben wir $\in$, sonst $\notin$. Z. B. ist $1 \in \{1,2\}$, aber $3 \notin \{1,2\}$. (Sprich: 1 ist Element von $\{1,2\}$, 3 ist nicht Element von $\{1,2\}$.)

Eine **Teilmenge** einer Menge A ist eine Menge B, deren sämtliche Elemente auch in A liegen. Man schreibt dann $B \subset A$. Z. B. ist $\{1,2\} \subset \{1,2,5\}$.

Man kann aus einer Menge eine Teilmenge mit besonderen Eigenschaften **auswählen.** Dies schreibt man mit einem Doppelpunkt (manchmal auch mit einem Strich $|$).

Beispiel: Für $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist $\{n \in A : n \text{ ist gerade}\} = \{2,4,6\}$. (Sprich: Die Menge aller Elemente n von A, für die gilt: n ist gerade)

Die wichtigsten Zahlbereiche sind Mengen:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$	Die Menge der **natürlichen Zahlen**
$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$	Die Menge der **ganzen Zahlen**
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} :, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	Die Menge der **rationalen Zahlen**
$\mathbb{R}$	Die Menge der **reellen Zahlen**

D. Grieser, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*,
DOI 10.1007/978-3-8348-2460-8, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

In diesem Buch benötigen wir nicht die genaue Definition von $\mathbb{R}$. Zusätzlich schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$.

Es ist nützlich, auch ein Symbol für eine Menge zu haben, die keine Elemente enthält. Sie heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$.

Die Elemente einer Menge müssen nicht Zahlen sein, sie können z. B. auch selbst Mengen sein. Z. B. hat die Menge $\{\{1,2\},\{1,3,6\}\}$ die beiden Elemente $\{1,2\}$ und $\{1,3,6\}$ und die Menge $\{\emptyset\}$ hat das Element $\emptyset$. Ist A eine Menge, so kann man sämtliche Teilmengen von A als Elemente einer neuen Menge auffassen, diese nennt man die **Potenzmenge** von A und bezeichnet sie mit $\mathcal{P}(A)$. Z. B. ist

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Beachten Sie, dass z. B. $\{1\}$ ein Element von $\mathcal{P}(\{1,2\})$ ist. Dagegen ist 1 kein Element von $\mathcal{P}(\{1,2\})$, wohl aber von $\{1\}$. Das mag kleinlich erscheinen, ist aber konsequent, und diese Konsequenz ist auf Dauer sehr praktisch! Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1,2\})$ hat damit vier Elemente: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ und $\{1,2\}$.

Ist A eine Menge, so bezeichnen wir mit $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Diese kann auch unendlich sein. Zum Beispiel ist $|\{3,5\}| = 2$, $|\emptyset| = 0$, $|\mathbb{N}| = \infty$ und $|\mathcal{P}(\{1,2\})| = 4$.

Mengenoperationen

Aus zwei Mengen kann man mit verschiedenen Operationen neue Mengen machen: Sind A, B Mengen, so definieren wir:

Name	Symbol	Definition
Vereinigung von A, B	$A \cup B$	$\{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
Durchschnitt von A, B	$A \cap B$	$\{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$
Differenzmenge von A, B	$A \setminus B$	$\{x : x \in A, \text{ aber } x \notin B\}$
Produktmenge von A, B	$A \times B$	$\{(x,y) : x \in A \text{ und } y \in B\}$

(Sprich: A vereinigt mit B, A geschnitten mit B, A ohne B, A mal B.) Zum Beispiel ist $\{1,2\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,4,6\}$, $\{1,2\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$ und $\{1,2\} \setminus \{2,4,6\} = \{1\}$.
Die Produktmenge wird im nächsten Abschnitt genauer besprochen.

Zwei Mengen heißen **disjunkt,** wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, d. h. wenn $A \cap B = \emptyset$. Sind A, B disjunkt, so nennt man $A \cup B$ manchmal ihre **disjunkte Vereinigung.**

Hat man mehrere Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$, so nennt man diese **paarweise disjunkt,** wenn je zwei von ihnen disjunkt sind: $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

Tupel

Neben Mengen sind Tupel eine andere Art, mehrere Objekte (Zahlen, Mengen etc.) zu Gruppen zusammenzufassen.

Aus zwei Objekten a, b kann man ein **Paar** (a, b) bilden. Hierbei kommt es auf die Reihenfolge an, d. h. (a, b) und (b, a) sind verschieden, falls $a \neq b$ ist. Die beiden Objekte dürfen auch gleich sein, das zählt aber immer noch als Paar: (a, a). Sind A, B Mengen, so bezeichnet man mit $A \times B$ die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Für $A = B$ schreibt man statt $A \times A$ auch A^2.
Z. B. ist $\{1{,}2\} \times \{1{,}2{,}3\} = \{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (2{,}1), (2{,}2), (2{,}3)\}$; man kann die Elemente von $A \times B$ in einem Rechteckschema anordnen:

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)

Die Zeilen entsprechen den Elementen von A, die Spalten den Elementen von B. (Es ginge auch andersherum, aber dies ist die für das Produkt $A \times B$ übliche Art der Darstellung, z. B. im Zusammenhang mit Matrizen.)

Aus drei Objekten a, b, c kann man **Tripel** (a, b, c) bilden. Auch hier kommt es auf die Reihenfolge an, und die Einträge müssen nicht verschieden sein. Z. B. ist (a, a, b) ein Tripel, das nicht mit dem Paar (a, b) zu verwechseln ist. Sind A, B, C Mengen, so bezeichnet man mit $A \times B \times C$ die Menge aller Tripel (a, b, c) mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Diese könnte man in einem quaderförmigen Schema anordnen. Für $A = B = C$ schreibt man statt $A \times B \times C$ auch A^3.

Bei vier Objekten spricht man von **Quadrupeln,** bei fünf von **Quintupeln,** allgemein bei k Objekten von k**-Tupeln**, für $k \in \mathbb{N}$. Schreibweise: $(a_1, \dots, a_k)$. Ein 2-Tupel ist also dasselbe wie ein Paar etc. Die Objekte $a_1, \dots, a_k$ heißen die **Komponenten** des Tupels.

Der Begriff der Tupel erlaubt eine schmerzlose Beschreibung höherer Dimensionen: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ kann man sich als Punkte auf der Zahlengeraden vorstellen. Paare reeller Zahlen entsprechen Punkten in der Ebene (das Zahlenpaar gibt die Koordinaten des Punktes bzgl. eines fest gewählten Koordinatensystems an) und Tripel reeller Zahlen entsprechen Punkten im Raum. In Analogie dazu definiert man für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den **n-dimensionalen Raum** als die Menge der n-Tupel reeller Zahlen. Dieser wird in diesem Buch nicht benötigt.

Abbildungen

Eine **Abbildung** ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Menge A ein Element einer Menge B zuordnet. Man schreibt dann $f : A \to B$, und $f(a)$ für das Element von B, das dem Element $a \in A$ zugeordnet ist. Dabei ist f ein Name für die Abbildung.

Z. B. definiert die Vorschrift $f(n) = 2n$ eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jeder Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

Statt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ schreibt man auch $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ (beachten Sie die unterschiedlichen Pfeiltypen). Den Variablennamen n darf man ändern: Dieselbe Abbildung hätte man z. B. auch als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $m \mapsto 2m$ oder als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\gamma \mapsto 2\gamma$ schreiben können.[1] Wenn man den Namen f nicht benötigt, kann man die Abbildung auch einfach als $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ schreiben.

Als weiteres Beispiel betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Die Abbildung f beschreibt eine Spiegelung an der x-Achse, d.h. $f(x, y)$ ist der Punkt, den man erhält, wenn man den Punkt (x, y) an der x-Achse spiegelt.

Eine Abbildung, deren Werte Zahlen sind, nennt man auch **Funktion.** Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

injektiv, falls es zu jedem $b \in B$ *höchstens* ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
surjektiv, falls es zu jedem $b \in B$ *mindestens* ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
bijektiv, falls es zu jedem $b \in B$ *genau* ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$

Zum Beispiel ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ injektiv, aber nicht surjektiv, da es zu jeder Zahl $b \in \mathbb{N}$ zwar höchstens ein n gibt mit $2n = b$, aber zu ungeradem b überhaupt kein solches n existiert.

Bezeichnet G die Menge der geraden natürlichen Zahlen, so ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to G$, $f(n) = 2n$ bijektiv. Denn zu jeder geraden natürlichen Zahl $b \in G$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2n = b$.

[1] Es gibt aber nützliche *Konventionen*: Zum Beispiel bezeichnet man natürliche Zahlen meist mit n, m, k, l und reelle Zahlen mit x, y, z.

Eine bijektive Abbildung heißt auch **Bijektion.** Sie setzt die Elemente von A und B in eineindeutige Beziehung zueinander, d. h. jedem Element von A entspricht genau ein Element von B und jedem Element von B entspricht genau ein Element von A.

Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt **Umkehrabbildung** der Abbildung $f : A \to B$, wenn „sich die Vorschriften von f und g gegeneinander aufheben", d. h. genauer: Für alle $a \in A$ gilt $g(f(a)) = a$ und für alle $b \in B$ gilt $f(g(b)) = b$.

Da bijektive Abbildungen in diesem Buch eine wichtige Rolle spielen, notieren wir Folgendes:

Satz

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent (das heißt, aus jeder dieser Bedingungen folgt jede andere):

a) f ist bijektiv.

b) f ist surjektiv und injektiv.

c) Es gibt eine Umkehrabbildung zu f.

Beweis.
Die Äquivalenz von a) und b) folgt direkt aus der Definition.
Angenommen, es gilt c), d. h. f hat eine Umkehrabbildung $g : B \to A$. Dann ist f surjektiv, denn zu gegebenem b kann man $a = g(b)$ setzen, dies erfüllt dann die Gleichung $f(a) = b$, weil $f(g(b)) = b$ ist.

f ist auch injektiv, denn wenn $f(a) = b$ gilt, so folgt durch Anwenden von g auf beide Seiten, dass $g(f(a)) = g(b)$ ist. Nach Voraussetzung ist $g(f(a)) = a$, also folgt $a = g(b)$. Damit haben wir gezeigt, dass es nur *ein* $a \in A$ geben kann mit $f(a) = b$.

Damit haben wir gezeigt, dass aus c) die Aussage b) und damit auch a) folgt.
Es bleibt zu zeigen, dass aus a) die Aussage c) folgt. Sei dazu f bijektiv. Dann können wir die Umkehrabbildung $g : B \to A$ direkt angeben: Sei $b \in B$. Da f bijektiv ist, gibt es genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Wir setzen dann $g(b) = a$. Dann ist g offenbar eine Umkehrabbildung zu f. q. e. d.

Beispiele

Sei G die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Die Umkehrabbildung zu $f : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ ist $g : G \to \mathbb{N}, m \mapsto \frac{m}{2}$.[2]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$. Diese Abbildung ist bijektiv mit Umkehrabbildung $g : y \mapsto \sqrt[3]{y}$.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 + x$. Ist diese Abbildung bijektiv? Dies würde bedeuten, dass es für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x^5 + x = y$. Das heißt, es geht hier um das Lösen einer Gleichung. Mit Mitteln der Analysis kann man zeigen, dass es für jedes y genau eine Lösung x gibt (vgl. die Diskussion auf S. 148).[3] Damit ist f bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) =$ die eindeutige Lösung x der Gleichung $x^5 + x = y$. Die Abbildung g ist ein Beispiel einer Abbildung, deren Vorschrift man nicht einfach als Formel hinschreiben kann.

Die Abbildung $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 1 \mapsto 3$.

Die Beispiele zeigen Ihnen die wichtigsten Arten, wie man eine Abbildung $f : A \to B$ angeben kann: Durch eine Formel oder durch eine Vorschrift (g im dritten Beispiel) oder durch Aufzählung (falls A eine endliche Menge ist, letztes Beispiel). Sie zeigen auch, dass das Bestimmen einer Umkehrabbildung oft das Auflösen einer Gleichung bedeutet: Um die Umkehrabbildung zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ zu bestimmen, löse ich die Gleichung $y = x^3$ nach x auf. Durch Ziehen der dritten Wurzel erhalte ich $x = \sqrt[3]{y}$, also ist $g : y \mapsto \sqrt[3]{y}$ die Umkehrabbildung.

[2] Es ist nützlich und hilft, Verwirrung zu vermeiden, wenn man bei der Umkehrabbildung einen anderen Variablennamen verwendet, also z. B. m statt n.

[3] Wenn Sie die Begriffe kennen: Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz und folgenden Eigenschaften von f: f ist stetig und streng monoton wachsend und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$.