Ebenen und Geraden

Inhaltsverzeichnis

Ebenen und Geraden 1
Die drei Ebenenformen 1
Eine Gerade 2
Schnitt Gerade und Ebene 2
Eine Gerade senkrecht zu E durch einen festen Punkt R 2
Eine Gerade senkrecht zu g und k durch einen festen Punkt Q 4
Eine Gerade senkrecht zu k (nur zu einer Geraden) durch einen festen Punkt T 4

Die drei Ebenenformen

Aufgabe 1: Eine Ebene geht durch die Punkte P(1/ 2/ 3), Q(12/ -4 /1) und R(1/ 4/ 0)

a) Bestimme die Parameterform, die Normalenform und die Koordinatenform.
b) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen, zeichne sie.

Lösungsvorschlag zu 1a):

Parameterform: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}11\\-6\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$

Zur **Normalen**: Berechne die Normale entweder mit dem Kreuzprodukt **oder** mit unserem typischen Vorgehen:

Sei $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ eine Normale, dann gilt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\-6\\-2\end{pmatrix}=11x-6y-2z=0$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=2y-3z=0$

Das sieht zuerst aufwändig aus, nach viel Arbeit, ist es aber nicht. Wir müssen ja nicht alle Lösungen angeben, eine einzige genügt. Bei der zweiten kann man eine Lösung sofort angeben: $y = 3$ und $z = 2$. Klar? Was ist der Trick?
Setzt man diese Werte in die erste Gleichung ein, erhält man $11x-18-4=0 \Rightarrow x=2$

Damit ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ eine Normale. Wenn man es geschickt anstellt (schaue, dass die ersten beiden Werte keinen gemeinsamen Teiler haben), erhält man auch leicht die Normale mit den kleinsten natürlichen Zahlen. Oft tritt bei der Lösung der zweiten Gleichung ein Bruch auf, man muss dann die Normale einfach mit dem Nenner multiplizieren.

Normalenform: $E:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=0$

Hier können wir mit den Vektoren rechnen, wie wenn es Zahlen sind, also

$$E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=2+6+6=14$$

Damit ist die **Koordinatenform** $E:2x+3y+2z=14$

MERKE: Alle Aufgaben zu Schnittpunkten, Abständen und Schnittwinkeln erledigen wir mit der Koordinatenform. Sie beschreibt die Punkte der Ebene durch eine einzige Gleichung, besser geht es nicht.

Lösungsvorschlag zu 1b): Sei $A_x(x,0,0)$ der Schnittpunkt der Ebene mit der x-Achse, dann ergibt sich mit der Koordinatenform: $2x = 14$ oder **x=7**. Also ist $A_x(7{,}0{,}0)$.
Ebenso folgt $A_y(7, \frac{14}{3}, 0)$ und $A_z(0{,}0{,}7)$

Eine Gerade

Aufgabe 2: Die Gerade g geht durch die Punkte A(3/ 1/ -2) und B(-3/ 4/ 13) Gib die Geradendarstellung an.

Lösungsvorschlag zu 2):
$g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$ oder $g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, wobei wir den Richtungsvektor durch ein Vielfaches ersetzt haben, genauer: Wir haben den Vektor durch den größten gemeinsamen Teiler der drei Elemente dividiert.

Schnitt Gerade und Ebene

Aufgabe 3: Bestimme den Schnittpunkt der Geraden $g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und der Ebene

$E: 2x + 3y + 2z = 14$.

Lösungsvorschlag zu 3):
Sei S(x/y/z) ein Schnittpunkt. Dann liegt S auf E und auf g, d.h. $2x + 3y + 2z = 14$ und es gibt ein t mit
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ Wir haben also vier Gleichungen mit vier Unbekannten x,y,z und t. Ersetzen wir in der ersten Gleichung, d.h. in der Koordinatengleichung, die Variablen x, y und z mit Hilfe der drei weiteren Gleichungen, den drei Geradengleichungen, erhalten wir eine Gleichung mit einer Unbekannten t, d.h. $2(3-2t) + 3(1+t) + 2(-2+5t) = 14$ oder $6 - 4t + 3 + 3t - 4 + 10t = 14$ oder $5 + 9t = 14$ oder $9t = 9$ d.h. $t = 1$. Die Koordinaten des Schnittpunktes erhalten wir, wenn wir den Wert t = 1 in die Geradengleichung einsetzen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g ist also S(1/2/3)

Eine Gerade senkrecht zu E durch einen festen Punkt R

Aufgabe 4: Bestimme die Gerade k, die E senkrecht schneidet und durch den Punkt R(5/ 0 / -7) geht. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden k mit der Ebene E.

Schneiden sich die beiden Geraden k und g? Wenn ja, gib den Schnittpunkt an.

Lösungsvorschlag zu 4):
Bem: Eine solche Gerade gibt es immer, egal ob R auf E oder nicht auf R liegt.

Wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zu E ist, dann ist die Gerade senkrecht zu E.
Als Richtungsvektor der Geraden können wir also einfach eine Normale der Ebene wählen. Sie ist z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist die gesuchte Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Den Schnittpunkt der Geraden und der Ebene bestimmen wir wie oben:

Sei S(x/y/z) ein Schnittpunkt. Dann liegt S auf E und auf k, d.h. $2x+3y+2z=14$ und es gibt ein t mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Ersetzen wir die Variablen in der Ebenengleichung, erhalten wir:

$2(5+2t)+3(0+3t)+2(-7+2t)=14$ oder $10+4t+9t-14+4t=14$ oder $-4+17t=14$ oder $17t=18$ d.h. $t=\frac{18}{17}\approx 1,0588$. Die Koordinaten des Schnittpunktes erhalten wir, wenn wir diesen Wert in die Geradengleichung einsetzen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{18}{17} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7,12 \\ 3,18 \\ -4,88 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g ist also S(7,12 / 3,18 / -4,88)

MERKE: Wenn wir entscheiden sollen, ob ein Schnittpunkt existiert, nehmen wir an, dass es einen Schnittpunkt gibt. Erhalten wir dann einen Schnittpunkt, so gibt es natürlich einen, wenn wir einen Unsinn erhalten, gibt es keinen Schnittpunkt.

Sei also S(x / y / z) ein Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(Vorsicht: Die Variablen in den beiden Geraden müssen verschieden sein!) Dann gibt es Zahlen r und s mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dies sind drei Gleichungen mit zwei Ungekannten r und s. Aus den ersten beiden Gleichungen können wir r und s berechnen. Ist dann mit diesen Zahlen auch die dritte Gleichung erfüllt, so gibt es einen Schnittpunkt, sonst keinen.

Die beiden Gleichungen sind $\begin{matrix} 3-2r=5+2s \\ 1+r=3s \end{matrix}$

Lösen wir die zweite Gleichung nach r auf und setzen sie in die erste ein (würden wir nach s auflösen, würden wir Brüche erhalten, das macht das Rechnen nur etwas anstrengender, ansonsten geht es gleich.).
Wir erhalten $3-2(3s-1)=5+2s$ oder $8s=0$ oder s = 0. Damit ist $r = -1$.

Die linke Seite der letzten Gleichung ist also $-2-5 = -7$ und die rechte Seite ebenfalls -7. Damit sind die beiden Variablen eine Lösung der drei Gleichungen.

Den Schnittpunkt erhalten wir, wenn wir in der Geraden k den Parameter s durch Null ersetzen. Er ist also S(5/0/-7)

Eine Gerade senkrecht zu g und k durch einen festen Punkt Q

Aufgabe 5: Bestimme eine Gerade i, die senkrecht zu $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ und $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ ist und durch R(1/ 1 / 1) geht.
Bestimme den Schnittpunkt der Geraden i mit der Ebene $E:2x+3y+2z=14$.
Schneiden sich die beiden Geraden i und g? Wenn ja, gib den Schnittpunkt an.

Lösungsvorschlag zu 5): Der Richtungsvektor von i muss senkrecht zu dem von g und k sein.
Sei also $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von i, so gilt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}=-2x+y+5z=0$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=2x+3y+2z=0$. Addieren wir die beiden Gleichungen, erhalten wir $4y+7z=0$. Eine Lösung dieser Gleichung ist $y=7$ und $z=-4$. Setzten wir diese Werte in eine der ursprünglichen Gleichungen ein, etwa in die erste, erhalten wir $2x=y+5z=7-20=-13$ oder $x=-\frac{13}{2}$. Ein Richtungsvektor ist also $\vec{u}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{2}\\7\\-4\end{pmatrix}$ oder $\vec{u}=\begin{pmatrix}13\\-14\\8\end{pmatrix}$. Die gesuchte Gerade ist also $i:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}13\\-14\\8\end{pmatrix}$

Sei S(x/y/z) ein Schnittpunkt der Geraden i und der Ebene E, dann gilt: $2x+3y+2z=14$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}13\\-14\\8\end{pmatrix}$. Wir setzen wieder die letzten drei Gleichungen in die erste ein und erhalten
$2(1+13t)+3(1-14t)+2(1+8t)=14$ oder $2+26t+3-42t+2+16t=14$ oder $7=14$
Da diese Gleichung nie richtig ist, war unsere Annahme falsch, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt.

Eine Gerade senkrecht zu k (nur zu einer Geraden) durch einen festen Punkt T

Aufgabe 6: Bestimme eine Gerade j, die senkrecht zu $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ ist und durch R(12/-2 /-2) geht.
Bestimme den Schnittpunkt der Geraden j mit der Ebene $E:2x+3y+2z=14$.

Lösungsvorschlag zu 6): Der Richtungsvektor von j muss senkrecht zu dem von k sein.

d.h für den Richtungsvektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ von j muss gelten $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}=2x+3y+2z=0$. Da diese Gleichung drei Unbekannten hat, können wir zwei davon beliebig wählen, allerdings so, dass nicht alle drei Null sind. Setzen wir etwa $y=0$, so ist $x=1$ und $z=-1$ eine Lösung, also ist $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor von j. Da R auf der Geraden liegen soll, ist $j:\vec{x}=\begin{pmatrix}12\\-2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ eine Gerade mit den gewünschten Eigenschaften.

Zu den möglichen Schnittpunkten der Gerade j mit der Ebene E: Sei S(x/y/z) ein Schnittpunkt, dann gilt: $2x+3y+2z=14$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Setzten wir wieder die letzten drei Gleichungen in die erste ein, erhalten wir: $2(12+t)+3(-2)+2(-2-t)=14$ oder $24+2t-6-4-2t=14$ oder $14=14$.
Die letzte Gleichung ist immer richtig, was auch immer wir für t einsetzen. Also liegen alle Punkte der Geraden j auf der Ebene. Die Gerade j liegt also in der Ebene E.