V Lineare Gleichungssysteme

1 Das Gauß-Verfahren

Seite 158

Einstiegsaufgabe

$x_1 + x_2 = 78$
$(x_1 - 4) = 6(x_2 - 4)$
$x_1 = 64;\ x_2 = 14$

Seite 160

1 a) $(3; -1; 2)$ b) $\left(-\frac{7}{3}; \frac{3}{4}; -2\right)$ c) $\left(0; -4; \frac{7}{2}\right)$

2 a) $(1; -1; 7)$ b) $(4; 1; -3)$ c) $(5; 0; -2)$

3 a) $(1; -1; 0)$ b) $(2; 3; -1)$ c) $(5; 1; 2)$

4 a) $(1; 1; 1)$ b) $(0; 1; 2)$ c) $(1; 2; -5)$

5 a) $(-4; 6)$ b) $(0{,}5; 2)$ c) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$

6 a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$, Lösung: $(-3; 1; 1)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, Lösung: $(4; -5; 1)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$, Lösung: $\left(\frac{-4}{3}; \frac{41}{6}; \frac{25}{12}\right)$

9 a) x_2 wurde vergessen.
b) Äquivalenzumformungen ersetzen immer jeweils nur eine Gleichung des LGS. Wenn man mehrere Äquivalenzumformungen auf einmal durchführt, muss dies in Einzelschritten möglich sein. Die erste Äquivalenzumformung ersetzt Gleichung II durch die Differenz aus II und III. Bei der nächsten Äquivalenzumformung müsste man nun II a statt II verwenden.

Seite 161

10 Man rechnet zuerst x_2 direkt mit Gleichung III aus. Dann x_1 mit II und schließlich x_2 mit I.

11 Individuelle Lösungen, z.B.:

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$

13 a) Wahr. Man kann die alte Umformung (3) erreichen, indem man vorher die eine Gleichung mit −1 multipliziert.
b) Falsch. Dann kann man eine Variable nicht mehr entfernen, wenn die Faktoren vor der Variablen z.B. 2 bzw. 3 sind.
c) Wahr. Man erhält (2), indem man das c-fache der einen Gleichung mit dem 0-fachen der anderen Gleichung addiert. Man erhält 3, indem man das 1-fache bzw. −1-fache der einen Gleichung mit dem 1-fachen der anderen Gleichung addiert.
d) Falsch. Das scheint zwar eine gute Idee zu sein, weil man dann das 0-fache einer Gleichung mit dem 1-fachen der anderen Gleichung so addieren kann, dass die Gleichung an eine andere Position kommt. Man hat dann aber zweimal die gleiche Gleichung im LGS stehen.

14 a)
$$\begin{array}{rl} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 & \text{I} \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 & \text{II} \quad 3 \cdot \text{I} + (-2) \cdot \text{II} \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 & \text{III} \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 & \text{I} \\ -11x_2 + 19x_3 = 8 & \text{II} \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 & \text{III} \end{array}$$
b) $(1; 1; 1)$
c) Zum Beispiel $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & -11 & 19 & 8 \\ -3 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right)$.
d) Es entsteht bei der weiteren Umformung eine Gleichung $0 = 0$. Es darf immer nur eine Gleichung ersetzt werden, die schon in der Summe vorkommt.

2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Seite 162

Einstiegsaufgabe

A gehört zu (2), B zu (3) und C zu (1).

Seite 163

1 a) $L = \{(6; 2; 3)\}$
b) keine Lösung
c) $L = \{(4{,}5t + 5;\ 2t + 2;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

2 a) $L = \{(1 - t;\ 1 + t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
b) $L = \left\{\left(5t + 3;\ 2t + \frac{1}{2};\ t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$
c) $L = \{(4; 2t; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3 a) $L = \{(1; -1; 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
b) $L = \{(2 - 6t;\ 3t + 1{,}5;\ 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
c) $L = \{(2 + t;\ 1 + 2t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Seite 164

4 a) Keine Lösung.
b) Keine Lösung.
c) $L = \{(1; 1; 1)\}$

5 a) ja b) nein c) nein d) ja e) nein f) ja

8 Individuelle Lösungen, z.B.:

a) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

b) $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$
$-3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

c) $x_1 - x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + x_2 - x_3 = 4$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7$

9 a) Falsch. Gegenbeispiel:
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
b) Falsch. Gegenbeispiel:
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 1$
c) Falsch. Gegenbeispiel:
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

10 a) $L = \{(2t + 1;\ t - 1;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
b) $L = \{(4; 1; -4)\}$
c) $L = \{(5 + t;\ -7t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

11 a) $L = \{(-1; 0; 2; 1)\}$ b) $L = \{(0; 0; 1; 1)\}$
c) Keine Lösung.

12 a) I $3x_1 + 7x_2 = 10$
II $7x_1 + 3x_2 = 10$
Nach Tobias: I $x_1 = \frac{10}{3} - \frac{7}{3}x_2$
eingesetzt II $\frac{70}{3} - \frac{49}{3}x_2 + 3x_2 = 10;\ -\frac{40}{3}x_2 = -\frac{40}{3}$;
$x_2 = 1;\ x_1 = 1$
Nach Gauß: $7 \cdot \text{I} - 3 \cdot \text{II}$ $49x_2 - 9x_2 = 70 - 30;\ 40x_2 = 40$;
$x_2 = 1;\ x_1 = 1$.
b) I $x_1 + x_2 = 1$
II $x_1 + x_2 = 2$
I $x_1 = 1 - x_2$; in II: $1 - x_2 + x_2 = 2;\ 1 = 2;\ L = \{\ \}$
I $x_1 + x_2 = 1$
II $2x_1 + 2x_2 = 2$
I $x_1 = 1 - x_2$; in II: $2 - 2x_2 + 2x_2 = 2;\ 2 = 2;\ x_2 = t$;
$x_1 = 1 - t;\ L = \{(1 - t;\ t)\}$

Seite 165

15 Einsetzen von (3; 1; 0) und (3; 2; 1) in das LGS zeigt, dass dies Lösungen sind.
Vermutung für die allgemeine Lösung: (3; t + 1; t). Einsetzen in das LGS zeigt, dass dies ebenfalls eine Lösung ist. Es kann keinen weiteren Parameter geben, weil sonst jede Gleichung ein Vielfaches der anderen sein müsste. Damit ist (3; t + 1; t) die allgemeine Lösung.

16 $x_1 + x_2 + x_3 = 75$
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 230$
$2x_2 + 2x_3 = 70$
in Stufenform
$x_1 + x_2 + x_3 = 75$
$-2x_2 - 2x_3 = -70,$
$0 = 0$
also unendlich viele Lösungen.
Die Information über die Flügel ist keine neue Information, weil sie in den Beinen schon enthalten ist. Man müsste eine Information haben, mit der man die Hühner von den Gänsen unterscheiden kann.
Da es aber nur 75 Tiere gibt, kann der Parameter nur endlich viele Werte annehmen.

17 Lösung für 2×2-System: (−3; 2) und für 2×3-System (−3; 2; t). Die Lösungen stimmen in den ersten beiden Koordinaten überein.

18 a) $L = \{(s;\ 1 - 2s + 5t;\ t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
b) $L = \{(2 - 4s + 2t;\ s;\ t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
c) $L = \{(s;\ -2s;\ t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

19 a) $r = 1$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ genau eine Lösung $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$;
$L = \{(0; 2; -2)\}$
b) $r = 0$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$ keine Lösung $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$
c) $r = 2$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$ unendlich viele Lösungen $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r-1 & 2 \\ 0 & r & -r & 4 \\ 0 & r-1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & r-1 & 2 \\ 0 & r & -r & 4 \\ 0 & -r^2+2r & 0 & 4-2r \end{array}\right)$
1. Fall: $r = 0$ ergibt $0 = 4$
2. Fall: $r = 2$ ergibt $0 = 0$
3. Fall: r nicht 2 oder 0
$x_2 = \frac{2(2-r)}{r(2-r)} = \frac{2}{r};\ x_3 = -\frac{2}{r};\ x_1 = 4 - \frac{4}{r}$

3 Bestimmen ganzrationaler Funktionen

Seite 166

Einstiegsaufgabe
Die Parabel mit dem Scheitelpunkt (10 | 6) und dem Schnittpunkt (0 | 2) mit y-Achse schneidet die positive x-Achse an der Stelle $x_1 \approx 22{,}25$. Dort landet die Kugel.

Seite 167

1 a) $f(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = 1{,}5x^2 - 1{,}5x$
c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$

Seite 168

2 $f(x) = x^3 - 3x$; $f''(x) = 6x$; $f''(1) > 0$ also Tiefpunkt.

3 a) $tx^2 + 2(1 - t)x$
b) $f(x) = t(x^2 - 4)$
c) $f(x) = tx^2 + (4t - 1)x - 4$

4 a) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$
b) $f(x) = x^3 - 7x$
c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x - 1$

7 $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$; $f''(x) = 24x^2 - 8$; $f''(1) > 0$

8 a) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 8$; $f'(x) = -3x^2 - 6x$;
$f''(x) = -6x - 6$; $f''(0) < 0$ also Hochpunkt.
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; $f''(x) = 6x - 6$; $f''(1) = 0$; Sattelpunkt, also keine Lösung

9 a) Die Parabel enthält $(0|0)$ und $(5|1)$;
$25a + 5b = 1$; $a = t$; $b = \frac{1}{5} - 5t$;
Mögliche Funktionen: $f_{-0,4}(x) = -0{,}4x^2 + 2{,}2x$
$f_{-0,2}(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x$; $f_{-0,5}(x) = -0{,}5x^2 + 2{,}7x$
b) $f(x) = x^2 - 4{,}8x$ enthält auch beide Punkte. Das Koordinatensystem ist dann ebenso gewählt. Die Parabel ist nach oben geöffnet. Der Ball würde von unten in den Korb gehen.
$f(x) = -5x^2 + 25{,}2x$ enthält auch beide Punkte. Das Koordinatensystem ist dann ebenso gewählt.
Der Scheitel der Parabel ist bei $(2{,}52|31{,}752)$, also so hoch, wie kein Basketballspieler werfen würden.

10 Der Graph der gesuchten Funktion ist eine Parabel. Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Scheitel der Parabel, so hat die gesuchte Funktion die Form $f(x) = ax^2$. Eine Punktprobe mit $(812|189)$ ergibt $a = \frac{189}{812^2}$ und somit $f(x) = \frac{189}{812^2}x$.

Seite 169

11 a) $f(x) = t \cdot x^2 + (3t - 1) \cdot x$

Blauer Graph: Punktprobe mit $(-4|0)$ ergibt:
$16 \cdot t - 12 \cdot t + 4 = 0$; daraus ergibt sich $t = -1$.
Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 - 4 \cdot x$.
Grüner Graph: Punktprobe mit $(-1|1)$ ergibt $t = 1$.
Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + 2 \cdot x$
Roter Graph: Punktprobe mit $(3|3)$ ergibt $t = \frac{1}{3}$.
Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$.
b) $f(x) = t \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} - 9 \cdot t$
Roter Graph: Punktprobe mit $(-1|4)$ ergibt:
$t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 9 \cdot t = 4$; daraus ergibt sich $t = -\frac{1}{4}$.
Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{15}{4}$.
Grüner Graph: Punktprobe mit $(1|2)$ ergibt $t = -\frac{1}{8}$.
Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{21}{8}$.
Blauer Graph: Punktprobe mit $(1|-1)$ ergibt $t = \frac{1}{4}$.
Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{4}$.

12 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}$ und $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}$

15 $f(x) = t(x^3 - 6x^2 + 9x - 2)$; $f''(x) = t(6x - 12)$; Aus $f''(3) < 0$ folgt $t < 0$. $f'''(2) = 6t$ also Wendepunkt. Man muss $t < 0$ wählen.

16 Es könnte eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein.
Dann wäre z.B. $P(1|2)$ ein Extrempunkt auf dem Graphen. Außerdem wäre an der Stelle -2 eine Extremstelle und an der Stelle -1 eine Wendestelle.

17 Der Graph ist offensichtlich punktsymmetrisch zum Ursprung. Es kommen eine Funktion dritten Grades oder fünften Grades infrage. Beim Graphen zur Funktion dritten Grades kann man nur die Endpunkte und die Steigung, aber nicht die Krümmung verwenden und bekommt keinen glatten Übergang (die 2. Ableitung der Funktion dritten Grades wäre an den Übergangsstellen ungleich null). Deshalb kommt D nicht infrage. A gehört zu einer Funktion dritten Grades und ist äquivalent zu D, weil sich für den Koeffizienten von x^2 und das Absolutglied die Lösung 0 ergibt. Bei einer Funktion vom Grad 5 kommen B und C infrage.
Entscheidung zwischen B und C:
C scheidet aus, weil hier wohl auch an eine Funktion dritten Grades ($2^3 = 8$) gedacht wurde, deren Graph aber nicht symmetrisch wäre. Man hat hier nur $d = 0$ gesetzt, damit der Graph den Ursprung enthält. Also kommt B infrage: Hier wird angesetzt: $f(2) = 2$, $f'(2) = 2$ und $f''(2) = 0$.