## Lösung S. 165 Nr. 19

Wir führen je einen Gauß-Schritt in den beiden unteren Zeilen durch:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 1 & 1 & r-1 & 2 \\ 1 & r & r-2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ G1-2\cdot G2 \\ G1-2\cdot G3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 0 & r & -r & 4 \\ 0 & -r+2 & -r+2 & 0 \end{array}\right)$$

Wenn wir jetzt die Matrix ansehen, stellen wir fest, dass:

1) Falls $r=0$ ist, haben wir bereits eine Stufenform.
   G2 liefert dann $0x+0y+0z=4$, d.h. unser Gleichungssystem hat für $r=0$ keine Lösung.
2) Wenn $r=2$ ist, liegt ebenfalls eine Stufenform vor.
   G3 liefert dann $0x+0y+0z=0$. Damit können wir eine Variable beliebig wählen, also etwa $z=t$
   G2 liefert dann wegen $r=2$: $2y-2z=4 \Rightarrow 2y=4+2z=4+2t \Rightarrow y=2+t$
   G1 ergibt schließlich: $2x+4y+0z=8 \Rightarrow 2x=8-4z=8-4t \Rightarrow x=4-2t$
   Damit sind die Lösungsvektoren (die Lösungsgerade) für $r=2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4-2t\\2+t\\0+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

Damit bleiben nur noch die Varianten $r\in\mathbb{R}$ . Sie lassen sich gemeinsam behandeln. Wir können jeweils G2 durch r und G3 durch 2-r dividieren.

Wir erhalten mit einem Gaußschritt bei der letzten Gleichung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{r} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ G2-G3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{r} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{r} \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir durch Rückwärts-Einsetzen:

1) G3 ergibt $z=-\frac{2}{r}$
2) G2: $y=\frac{4}{r}+z=\frac{4}{r}-\frac{2}{r}=\frac{2}{r}$
3) G1: $2x=8-(r+2)y-(r-2)z=8-(r+2)\frac{2}{r}+(r-2)\frac{2}{r}=8-2-\frac{4}{r}+2-\frac{4}{r}=8-\frac{8}{r}$
   Also $x=4-\frac{4}{r}$
4) Damit ist der Lösungsvektor für $r\in\mathbb{R}$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}4-\frac{4}{r}\\ \frac{2}{r}\\ -\frac{2}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{r}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$