10 a) $f_a(x) = x^3 - ax^2$; $f'_a(x) = 3x^2 - 2ax$;
$f''_a(x) = 6x - 2a$; $f'''_a(x) = 6$.
$f''_a(x) = 0$ liefert $6x - 2a = 0$ und $x_1 = \frac{1}{3}a$.
Es ist $f'''_a\left(\frac{1}{3}a\right) = 6 \neq 0$.
Wendepunkt $W\left(\frac{1}{3}a \,\middle|\, -\frac{2}{27}a^3\right)$.
b) $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$; $f'_a(x) = 4x^3 - 4ax$;
$f''_a(x) = 12x^2 - 4a$; $f'''_a(x) = 24x$.
$f''_a(x) = 0$ liefert $12x^2 - 4a = 0$ und $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}a}$ und
$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}a}$.
Es ist $f'''_a\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}a}\right) \neq 0$ für $a \neq 0$.
Wendepunkte $W_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$
und $W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$.

13 $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$; $f''(x) = 12x^2 - 8x$;
$f'''(x) = 24x - 8$
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.
$f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$; x_1 ist also eine Wendestelle.
$f''(1) = 4 > 0$; x_2 ist also Minimalstelle. Mit $f(1) = -\frac{7}{3}$ erhält man den Tiefpunkt $T\left(1 \,\middle|\, -\frac{7}{3}\right)$.
Da $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$, hat f genau zwei Nullstellen.

14 Da $S(x_0|0)$ ein Sattelpunkt ist, gilt $f(x_0) = 0$;
$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0$.
$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$; $g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$;
$g'''(x) = 3f''(x) + x \cdot f'''(x)$
$g(x_0) = x_0 \cdot f(x_0) = 0$
$g'(x_0) = f(x_0) + x_0 \cdot f'(x_0) = 0$
$g''(x_0) = 2 \cdot f'(x_0) + x_0 \cdot f''(x_0) = 0$
$g'''(x_0) = 3 \cdot f''(x_0) + x0 \cdot f'''(x_0) \neq 0$, falls $x_0 \neq 0$.
Für $x_0 \neq 0$ ist $S(x_0|0)$ auch ein Sattelpunkt des Graphen von g.

15 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$;
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6x + 2b$;
$f'''(x) = 6$. $f''(x) = 6x + 2b = 0$ ergibt $x = -\frac{b}{3}$;
in die Gleichung $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$
eingesetzt: $\frac{b^2}{3} - 2\frac{b^2}{3} + c = 0$ oder $c = \frac{b^2}{3}$.
Extremstellen: $f'(x) = 0$ ergibt mit $c = \frac{b^2}{3}$ die Gleichung $3x^2 + 2bx + \frac{b^2}{3} = 0$ mit der einzigen Lösung $x_2 = -\frac{b}{3}$.
Dies ist aber keine Extremstelle, sondern eine Wendestelle mit waagerechter Tangente.

8 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Seite 29

Einstiegsaufgabe
Den größten Flächeninhalt erhält man, wenn alle Seiten aus 5 Streichhölzchen bestehen.
1. Seite: n; 2. Seite: $\frac{1}{2} \cdot (20 - 2n) = 10 - n$;
Flächeninhalt: $n \cdot (10 - n) = 10n - n^2$

Seite 30

1 Flächeninhalt: $A = x \cdot y$ mit $0 \le x, y \le 25$,
Nebenbedingung: $2x + 2y = 50$,
Zielfunktion: $A(x) = x(25 - x)$.
Globales Maximum für $x = y = 12{,}5$.

2 Umfang: $U = 2x + 2y$ mit $x, y \ge 0$,
Nebenbedingung: $x \cdot y = 400$,
Zielfunktion: $U(x) = 2x + \frac{800}{x}$.
Globales Minimum für $x = y = 20$.

3 Volumen: $V = a \cdot b \cdot x$ mit $0 \le a \le 16$; $0 \le b \le 10$; $0 \le x \le 5$
Nebenbedingungen: $a = 16 - 2x$; $b = 10 - 2x$
Zielfunktion:
$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x) \cdot x = 160x - 52x^2 + 4x^3$;
$D = [0; 5]$
$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2$; $V''(x) = -104 + 24x$
$V'(x) = 0$ liefert $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{20}{3} \notin D$.
$V''(2) = -104 + 48 < 0$, die beiden Randwerte ergeben das Volumen 0, also ist 2 Maximumstelle.
Die Schachtel hat also die Maße $12\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$.

4 $d(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
Aus $d'(x) = 4x - 4 = 0$ folgt $x = 1$. Da der Graph von d eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist $d(1) = 1$ das globale Minimum.

Seite 31

5 a) Seitenlängen des Quaders: x, y (in dm)
Oberflächeninhalt: $O = 2x^2 + 4xy$ (in dm^2)
Nebenbedingung: Volumen $x^2 \cdot y = 1$ (in dm^3), also $y = \frac{1}{x^2}$
Zielfunktion: $O(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$; $x \ge 0$
$O'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$; $O''(x) = 4 + \frac{8}{x^3} > 0$
$O'(x) = 0$ liefert die Minimumstelle $x_1 = 1$; $y_1 = \frac{1}{x_1^2} = 1$;
d.h. für einen Würfel mit der Kantenlänge 1 dm benötigt man am wenigsten Material.
b) Oberflächeninhalt: $O = x^2 + 4xy$ (in dm^2)
Nebenbedingung: Volumen $x^2 \cdot y = 1$ (in dm^3), also $y = \frac{1}{x^2}$
Zielfunktion: $O(x) = x^2 + \frac{4}{x}$; $x \ge 0$
$O'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$; $O''(x) = 2 + \frac{8}{x^3} > 0$
$O'(x) = 0$ liefert die Minimumstelle $x_1 = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}26$;
$y_1 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}63$.
Der Materialverbrauch ist minimal, wenn die Höhe halb so groß ist wie die Grundseite.

6 Oberfläche: $O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$ mit $r, h \ge 0$,
Nebenbedingung: $\pi r^2 \cdot h = 1000$, d.h. $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
Zielfunktion: $O(r) = \frac{2000}{r} + \pi r^2$, $r \ge 0$
Globales Minimum für $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$; $h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$.
Der Blechverbrauch ist minimal, wenn der Radius und die Höhe gleich ($\approx 6{,}83\,\text{cm}$) sind.

7 Volumen des Kartons: $V = x^2 \cdot y$ mit $x,\ y \geq 0$,
Nebenbedingung: $O = x^2 + 4xy = 100$,
Zielfunktion: $V(x) = x^2 \cdot \left(\frac{100 - x^2}{4x}\right) = 0{,}25(100x - x^3)$.
$V'(x) = 25 - 0{,}75x^2 = 0$ liefert $x_1 = \frac{10}{3}\sqrt{3} \approx 5{,}77$.
$y_1 = \frac{5}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}89$
Globales Maximum: $\frac{500}{9}\sqrt{3} \approx 96{,}22$ (in cm^3)
Die Grundseite muss also doppelt so groß sein wie die Höhe.
Da der Graph von V eine zum Ursprung symmetrische ganzrationale Funktion dritten Grades ist, kann kein weiteres Maximum existieren.

10 Grundseite der Pyramide: x (in m); Höhe: h (in m);
Seitenkante: $s = 3{,}00$ (in m)
Volumen: $V = \frac{1}{3}x^2 \cdot h$
Nebenbedingung (mit Satz des Pythagoras): Diagonale
$d = \sqrt{x^2 + x^2} = x \cdot \sqrt{2}$
$h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 \Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{x}{2}\sqrt{2}\right)^2 = s^2$; also $x^2 = 2(s^2 - h^2)$
Zielfunktion: $V(h) = \frac{2}{3}(s^2 - h^2) \cdot h = \frac{2}{3}s^2h - \frac{2}{3}h^3$; $0 \leq h \leq s$
$V'(h) = \frac{2}{3}s^2 - 2h^2$; $V''(h) = -4h < 0$
$V'(h) = 0$ liefert $h_1 = s \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{s}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}73$ (Maximalstelle wegen $V''(h_1) < 0$)
$x_1 = \sqrt{2\left(s^2 - \frac{s^2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}s^2} = \frac{2s}{3}\sqrt{3} \approx 3{,}46$
Das Volumen wird maximal, wenn die Grundseite doppelt so lang ist wie die Höhe des Zeltes.

11 Umfang: $U = 2y + 2x + \pi x$ mit $x, y \geq 0$,
Nebenbedingung: $A = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}$, Zielfunktion:
$U(x) = 2 \cdot \left(\frac{45}{2x} - \frac{\pi x}{4}\right) + 2x + \pi x$. Globales Minimum für $x \approx 3{,}55$ (in m); $y \approx 3{,}55$

12 Höhe: $h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{23}{20}x^2 - \frac{33}{10}x + 4$
$h'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{23}{10}x - \frac{33}{10}$; $h''(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{23}{10}$
$h'(x) = 0$ liefert $x_1 \approx 1{,}91$; $x_2 \approx 5{,}76$
$h''(x_1) > 0$, also ist x_1 Minimumstelle; $h''(x_2) < 0$, also ist x_2 Maximumstelle; $h(x_1) \approx 1{,}20$; $h(x_2) \approx 4{,}04$.

13 a) Flächeninhalt: $A = u \cdot v$
Nebenbedingung $\left(P(u\,|\,v)\right.$ liegt auf der Geraden
$\left.y = -\frac{4}{5}x + 72\right)$: $v = -\frac{4}{5}u + 72$
Zielfunktion: $A(u) = u \cdot \left(-\frac{4}{5}u + 72\right) = -\frac{4}{5}u^2 + 72u$;
$40 \leq u \leq 60$
$A'(u) = -\frac{8}{5}u + 72$; $A''(u) = -\frac{8}{5} < 0$
$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 45$; $v_1 = 36$; $A(45) = 1620$
Randwerte: $A(40) = 1600$; $A(60) = 1440$
Die größtmögliche Platte ist 45 cm lang, 36 cm breit und hat den Flächeninhalt 1620 cm^2.

b) Flächeninhalt: $A = u \cdot v$
Nebenbedingung $\left(P(u\,|\,v)\right.$ liegt auf der Geraden
$\left.y = -\frac{2}{5}x + 56\right)$: $v = -\frac{2}{5}u + 56$
Zielfunktion: $A(u) = u \cdot \left(-\frac{2}{5}u + 56\right) = -\frac{2}{5}u^2 + 56u$;
$40 \leq u \leq 60$
$A'(u) = -\frac{4}{5}u + 56$; $A''(u) = -\frac{4}{5} < 0$
$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 70$; x_1 liegt nicht in der Definitionsmenge von A.
Randwerte: $A(40) = 1600$; $A(60) = 1920$
Die größtmögliche Platte ist 60 cm lang, 32 cm breit und hat den Flächeninhalt 1920 cm^2.

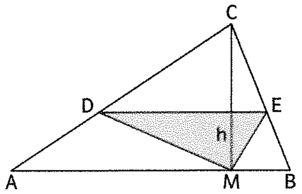
Seite 32

14 Einnahmen pro Passagier und Tag (in €): 200
Preissenkung pro Passagier (in Vielfachen von 25 €): x
Anzahl der Passagiere: $1050 + x \cdot 20 \cdot 15 = 1050 + 300x$
Tageseinnahmen:
$E(x) = (1050 + 300x)(200 - 25x)$
$= 210\,000 + 33\,750x - 7500x^2$; $0 \leq x \leq 8$
$E'(x) = -15\,000x + 33\,750$; $E''(x) = -15\,000 < 0$
$E'(x) = 0$ liefert $x_1 = 2{,}25$
Da nur ganzzahlige Vielfache von 25 € betrachtet werden, sollte die Airline die Preise um 50 € pro Person senken.

17 a) Tragfähigkeit $T = c \cdot b \cdot h^2$; $c > 0$; b, h in m
Nebenbedingung (mit Satz des Pythagoras):
$b^2 + h^2 = (2r)^2 = 1$, also $h^2 = 1 - b^2$
Zielfunktion: $T(b) = c \cdot b \cdot (1 - b^2) = c \cdot (b - b^3)$;
$0 \leq b \leq 2r$
$T'(b) = c \cdot (1 - 3b^2)$; $T''(b) = -6cb < 0$
$T'(b) = 0$ liefert $b_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577$ (Maximumstelle)
$h_1 = \sqrt{1 - b_1^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0{,}816$.
Der Balken hat die Maße 57,7 cm und 81,6 cm.
b) Nach der Zimmermannsregel (mit dem Kathetensatz für $a = \frac{2}{3}r$) gilt
$b^2 = a \cdot 2r = \frac{2}{3}r \cdot 2r = \frac{4}{3}r^2 = \frac{1}{3}$, also $b_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
Die Zimmermannsregel liefert also das exakte Ergebnis.

18 a) Kathetenlängen a, b (in cm)
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab$
Nebenbedingung (Satz des Pythagoras): $a^2 + b^2 = 100$,
also $b = \sqrt{100 - a^2}$
Zielfunktion: $A(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{100 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100a^2 - a^4}$;
$0 \leq a \leq 10$
$A'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{200a - 4a^3}{\sqrt{100a^2 - a^4}} = 0$ liefert $a_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
$A(\sqrt{50}) = 25$; Randwerte: $A(0) = A(10) = 0$; $a_1 = \sqrt{50}$ ist also die Maximumstelle.
$b_1 = \sqrt{100 - 50} = a_1$. Beide Katheten müssen also ca. 7,07 cm lang sein.
b) Umfang: $U = a + b + 10$
Zielfunktion: $U(a) = a + \sqrt{100 - a^2} + 10$; $0 \leq a \leq 10$
$U'(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{100 - a^2}} = 0$ liefert $a_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
Die Kathetenlängen sind beim maximalen Umfang dieselben wie beim maximalen Flächeninhalt.

19



Der Flächeninhalt des Dreiecks DEM ist unabhängig davon, wo der Punkt M auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt, da die Höhe des Dreiecks bei Verschiebung von M gleich bleibt. Wähle M so, dass $\overline{MC}$ orthogonal zu $\overline{AB}$ ist.

Flächeninhalt des Dreiecks DEM: $F = \frac{1}{2}\overline{DE} \cdot h$

Nebenbedingung (Strahlensatz): $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CM} - h}{\overline{CM}}$

$\Leftrightarrow \ \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{CM} - h}{\overline{CM}}$

Zielfunktion: $F(h) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \frac{\overline{CM} - h}{\overline{CM}} \cdot h = \frac{1}{2}\frac{\overline{AB}}{\overline{CM}}(\overline{CM} \cdot h - h^2)$

$F'(h) = \frac{1}{2}\frac{\overline{AB}}{\overline{CM}}(\overline{CM} - 2h) = 0$ liefert $h_1 = \frac{1}{2}\overline{CM}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird maximal, wenn $\overline{DE}$ die Mittelparallele des Dreiecks ABC ist.