e) $f'(x) = \frac{-2x(3x+1) - (1-x^2) \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{-6x^2 - 2x - 3 + 3x^2}{(3x+1)^2}$

$= \frac{-3x^2 - 2x - 3}{(3x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{-x \cdot \sin(x) - \cos(x)}{x^2} = -\frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x)}{x^2}$

$h'(x) = \frac{\cos^2(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

15 a) $f(x) = x^9 = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ mit
$u(x) = v(x) = w(x) = x^3$
$f'(x) = 9x^8$
$u'(x) = v'(x) = w'(x) = 3x^2$
$u'(x) \cdot v'(x) \cdot w'(x) = 27x^6 \neq f'(x)$
b) $g'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$
$f(x) = [x \cdot \sin(x)] \cdot \cos(x)$
$f'(x) = [x \cdot \sin(x)]' \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x))$
$= (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) - x \cdot \sin^2(x)$
$= \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \cos^2(x) - x \cdot \sin^2(x)$
c) $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$
$f' = (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$
$= (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$
$= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$
Vermutung: Für $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n$ gilt
$f' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \cdot \ldots \cdot f_n$
$+ \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n'$

6 Monotonie und Krümmung

Seite 23

Einstiegsaufgabe
Die Anzahl der Kunden wächst auch nach Ende Juni weiter, aber ab diesem Zeitpunkt verlangsamt sich das Wachstum.

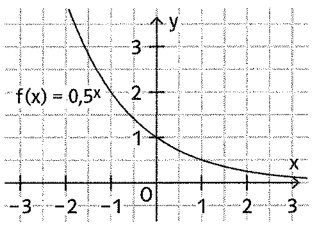
Seite 24

1 a) streng monoton fallend
b) monoton wachsend
c) keine Monotonie
d) streng monoton wachsend

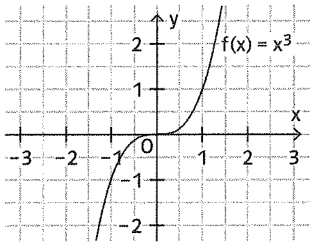
2 a) Die Funktion f ist monoton wachsend im Intervall $I = (0; 1{,}3)$.
Die Funktion g ist monoton wachsend im Intervall $I = (1{,}6; 2{,}5)$.
b) Der Graph von f ist linksgekrümmt für $-1 < x < 0{,}8$.
Der Graph von g ist linksgekrümmt für $-1 < x < 0$ und für $1 < x < 2{,}5$.

3 a) $f'(x) = 0{,}4x > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 0{,}4 > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.
b) $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ für $x > 1$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 6x > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.
c) $f'(x) = 4x^3 - 4x > 0$ für $x > 1$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 12x^2 - 4 > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.

4 a)



b)



Seite 25

7 a) $f'(x) = x^3 + 6x$; $f''(x) = 3x^2 + 6$;
$f''(x) > 0$ für alle x; der Graph von f ist eine Linkskurve für alle x.
b) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f''(x) = 6x - 6$;
$f''(x) > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f für $x > 1$ eine Linkskurve; für $x < 1$ ist der Graph eine Rechtskurve.
c) $f'(x) = 2\cos(x)$; $f''(x) = -2\sin(x)$;
$f''(x) < 0$ für $0 < x < \pi$; der Graph von f ist eine Rechtskurve.

8 a) Falsch. Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$; daher ist f′ streng monoton fallend.
b) Falsch. Zum Beispiel hat f′ mit $f'(x) = 0{,}5x^2 - 1$ den vorgegebenen Graphen als Graph der 2. Ableitung, aber $f'(x) < 0$ für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
c) Richtig. Für $x > 0$ gilt $f''(x) > 0$, der Graph von f ist eine Linkskurve.
d) Richtig. Um Aussagen über das Krümmungsverhalten von f′ zu machen, betrachtet man die zweite Ableitung von f′, also f‴. Es gilt $f'''(x) > 0$ für alle x, also ist f′ eine Linkskurve für alle x.

10 a) Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$. f′ ist für alle x streng monoton wachsend, f ist für $x < 0$ aber streng monoton fallend.
b) Gegenbeispiel: $f(x) = -x^4$. Für $x = 0$ gilt: $f''(0) = 0$.
c) Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$.
Es gilt: $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

11 Für $x > 0$ gilt $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$; $f''(x) \geq 0$.
a) $g(x) = x + f(x)$; $g'(x) = 1 + f'(x)$; $g''(x) = f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
b) $g(x) = x \cdot f(x)$; $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
c) $g(x) = f^2(x)$; $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2 \cdot ((f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x))$;
g besitzt die drei Eigenschaften.

d) $g(x) = \sqrt{f(x)}$; $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$;

$g''(x) = \frac{f''(x) \cdot 2\sqrt{f(x)} - f'(x) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}}{4f(x)}$;

Es ist $g(x) > 0$ und $g'(x) > 0$, aber $g''(x)$ könnte ≤ 0 sein. Zum Beispiel treffen für den Graphen von f mit $f(x) = x^2$ alle drei Eigenschaften zu. Aber der Graph von g mit $g(x) = \sqrt{f(x)} = x$ ist eine Gerade und nicht linksgekrümmt ($g''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$).

7 Extrem- und Wendepunkte

Seite 26

Einstiegsaufgabe

Ende April: Der Anstieg des Wasserstands ist maximal, anschließend steigt er weiter, aber weniger stark.
Ende Juni: Der Wasserstand ist am höchsten.
Ende September: Der Wasserstand nimmt am stärksten ab.

Seite 27

1 Maximumstelle: −2; Minimumstelle: 2
Wendestellen: −1,4; 0; 1,4

2 a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f''(x) = 6x - 2$; $f'''(x) = 6$.
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}$.
Wegen $f''(0) = -2 < 0$ ist 0 lokale Maximumstelle.
Wegen $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$ ist $\frac{2}{3}$ lokale Minimumstelle.
$f''(x) = 0$ liefert $x_3 = \frac{1}{3}$. Wegen $f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$ ist $\frac{1}{3}$ Wendestelle.

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$; $f'(x) = x^3$; $f''(x) = 3x^2$; $f'''(x) = 6x$
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$.
Wegen $f''(0) = 0$: VZW-Untersuchung an der Stelle $x = 0$. Es ist $f'(x) = x^3$. Für x-Werte aus einer Umgebung um 0 wechselt x^3 das Vorzeichen von − nach +, also ist 0 lokale Minimumstelle von f.
$f''(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; 0 ist lokale Minimumstelle, f hat also keine Wendestelle.

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 2$; $f'(x) = x^3 - 4x$; $f''(x) = 3x^2 - 4$; $f'''(x) = 6x$.
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.
Wegen $f''(0) = -4 < 0$ ist 0 lokale Maximumstelle.
Wegen $f''(\pm 2) = 8 > 0$ sind −2 und 2 lokale Minimumstellen.
$f''(x) = 0$ liefert $x_4 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ und $x_5 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Wegen $f'''\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \neq 0$ sind x_4 und x_5 Wendestellen von f.

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$;
$f'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$; $f''(x) = 2x - 4$; $f'''(x) = 2$.
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 2$, wegen $f''(2) = 0$ und $f'''(2) \neq 0$ ist x_1 eine Wendestelle, in dem Fall ein Sattelpunkt.

e) $f(x) = x \cdot (1 - x^2) = x - x^3$; $f'(x) = 1 - 3x^2$; $f''(x) = -6x$; $f'''(x) = -6$
Minimumstelle: $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; Maximumstelle: $\frac{1}{3}\sqrt{3}$;
Wendestelle: 0

f) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2$; $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$;
$f''(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $f'''(x) = 12x^2 - 8$.
Maximumstelle: -2; Minimumstelle: 2; Wendestellen: $-\sqrt{2}$; 0 (mit waagerechter Tangente); $\sqrt{2}$.

3 a) $f'(x) = 2\cos(x)$; $f''(x) = -2\sin(x)$; $f'''(x) = -2\cos(x)$
Maximumstelle: $\frac{\pi}{2}$; Wendestelle: π; Minimumstelle: $\frac{3\pi}{2}$

b) $f'(x) = 2\sin(2x)$; $f''(x) = 4\cos(2x)$; $f'''(x) = -8\sin(2x)$
Maximumstelle: $\frac{\pi}{2}$; Minimumstellen: 0 und π; Wendestellen: $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$

4 a) $f(x) = x$ b) $f(x) = \sin(x)$
c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$

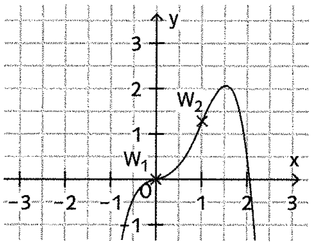
Seite 28

7 a) Falsch. Gegenbeispiel: f mit $f(x) = x^5$ hat keine Extremstellen.

b) Richtig. Jede ganzrationale Funktion f dritten Grades hat die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$
$f''(x) = 0$ liefert $x_1 = -\frac{b}{3a}$; $f'''(x) \neq 0$, also ist x_1 Wendestelle.

c) Richtig. Ist x_1 eine Maximalstelle der Funktion f, so ist der Graph von f in einer Umgebung von x_1 rechtsgekrümmt, f′ nimmt also für $x > x_1$ ab. Wenn f eine weitere Extremstelle x_2 hat, so muss f′ ab einer Stelle x_w wieder zunehmen. An dieser Stelle wechselt f″ sein Vorzeichen, d.h. x_w ist eine Wendestelle. Entsprechendes gilt, wenn x_1 eine Minimumstelle ist.

d) Falsch. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wendestellen ist f′ monoton zu- bzw. abnehmend, muss aber nicht gleich Null werden. Gegenbeispiel: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{-x^4 + 2x^3 + x}{4}$ hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ Wendestellen aber keine Extremstelle dazwischen.



8 $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = 1$
Wendepunkt: $W\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{7}{8}\right)$; $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{8}$
Gleichung der Tangente: $y = -\frac{9}{8}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{7}{8} = -\frac{9}{8}x + \frac{41}{16}$

9 Der kleinste Abstand zur x-Achse ist das absolute Maximum bzw. Minimum von f.

a) $f'(x) = x^3 - 1$; $f''(x) = 3x^2$; $T\left(1\middle|\frac{1}{4}\right)$ hat den kleinsten Abstand.

b) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 24x$; $f''(x) = 4x^2 + 3x + 24$
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$ als einzige Lösung. $f''(0) = 24 > 0$; $T\left(0\middle|\frac{3}{4}\right)$ ist Tiefpunkt, hat also den kleinsten Abstand zur x-Achse.

c) Der Tiefpunkt $T(\pi\,|\,3)$ hat den kleinsten Abstand.

10 a) $f_a(x) = x^3 - ax^2$; $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax$;
$f_a''(x) = 6x - 2a$; $f_a'''(x) = 6$.
$f_a''(x) = 0$ liefert $6x - 2a = 0$ und $x_1 = \frac{1}{3}a$.
Es ist $f_a'''\left(\frac{1}{3}a\right) = 6 \neq 0$.
Wendepunkt $W\left(\frac{1}{3}a \,\middle|\, -\frac{2}{27}a^3\right)$.
b) $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + 1$; $f_a'(x) = 4x^3 - 4ax$;
$f_a''(x) = 12x^2 - 4a$; $f_a'''(x) = 24x$.
$f_a''(x) = 0$ liefert $12x^2 - 4a = 0$ und $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}a}$ und
$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}a}$.
Es ist $f_a'''\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}a}\right) \neq 0$ für $a \neq 0$.
Wendepunkte $W_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$
und $W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}a} \,\middle|\, -\frac{5}{9}a^2 + 1\right)$.

13 $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x - 1)$; $f''(x) = 12x^2 - 8x$;
$f'''(x) = 24x - 8$
$f'(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.
$f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$; x_1 ist also eine Wendestelle.
$f''(1) = 4 > 0$; x_2 ist also Minimalstelle. Mit $f(1) = -\frac{7}{3}$
erhält man den Tiefpunkt $T\left(1 \,\middle|\, -\frac{7}{3}\right)$.
Da $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$, hat f genau zwei Nullstellen.

14 Da $S(x_0|0)$ ein Sattelpunkt ist, gilt $f(x_0) = 0$;
$f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0$.
$g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$; $g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$;
$g'''(x) = 3f''(x) + x \cdot f'''(x)$
$g(x_0) = x_0 \cdot f(x_0) = 0$
$g'(x_0) = f(x_0) + x_0 \cdot f'(x_0) = 0$
$g''(x_0) = 2 \cdot f'(x_0) + x_0 \cdot f''(x_0) = 0$
$g'''(x_0) = 3 \cdot f''(x_0) + x0 \cdot f'''(x_0) \neq 0$, falls $x_0 \neq 0$.
Für $x_0 \neq 0$ ist $S(x_0|0)$ auch ein Sattelpunkt des Graphen von g.

15 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$;
$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6x + 2b$;
$f'''(x) = 6$. $f''(x) = 6x + 2b = 0$ ergibt $x = -\frac{b}{3}$;
in die Gleichung $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 0$
eingesetzt: $\frac{b^2}{3} - 2\frac{b^2}{3} + c = 0$ oder $c = \frac{b^2}{3}$.
Extremstellen: $f'(x) = 0$ ergibt mit $c = \frac{b^2}{3}$ die Gleichung
$3x^2 + 2bx + \frac{b^2}{3} = 0$ mit der einzigen Lösung $x_2 = -\frac{b}{3}$.
Dies ist aber keine Extremstelle, sondern eine Wendestelle mit waagerechter Tangente.

8 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Seite 29

Einstiegsaufgabe
Den größten Flächeninhalt erhält man, wenn alle Seiten aus 5 Streichhölzchen bestehen.
1. Seite: n; 2. Seite: $\frac{1}{2} \cdot (20 - 2n) = 10 - n$;
Flächeninhalt: $n \cdot (10 - n) = 10n - n^2$

Seite 30

1 Flächeninhalt: $A = x \cdot y$ mit $0 \le x, y \le 25$,
Nebenbedingung: $2x + 2y = 50$,
Zielfunktion: $A(x) = x(25 - x)$.
Globales Maximum für $x = y = 12{,}5$.

2 Umfang: $U = 2x + 2y$ mit $x, y \ge 0$,
Nebenbedingung: $x \cdot y = 400$,
Zielfunktion: $U(x) = 2x + \frac{800}{x}$.
Globales Minimum für $x = y = 20$.

3 Volumen: $V = a \cdot b \cdot x$ mit $0 \le a \le 16$; $0 \le b \le 10$;
$0 \le x \le 5$
Nebenbedingungen: $a = 16 - 2x$; $b = 10 - 2x$
Zielfunktion:
$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x) \cdot x = 160x - 52x^2 + 4x^3$;
$D = [0; 5]$
$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2$; $V''(x) = -104 + 24x$
$V'(x) = 0$ liefert $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{20}{3} \notin D$.
$V''(2) = -104 + 48 < 0$, die beiden Randwerte ergeben das Volumen 0, also ist 2 Maximumstelle.
Die Schachtel hat also die Maße $12\,cm \times 6\,cm \times 2\,cm$.

4 $d(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
Aus $d'(x) = 4x - 4 = 0$ folgt $x = 1$. Da der Graph von d eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist $d(1) = 1$ das globale Minimum.

Seite 31

5 a) Seitenlängen des Quaders: x, y (in dm)
Oberflächeninhalt: $O = 2x^2 + 4xy$ (in dm^2)
Nebenbedingung: Volumen $x^2 \cdot y = 1$ (in dm^3), also
$y = \frac{1}{x^2}$
Zielfunktion: $O(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$; $x \ge 0$
$O'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$; $O''(x) = 4 + \frac{8}{x^3} > 0$
$O'(x) = 0$ liefert die Minimumstelle $x_1 = 1$; $y_1 = \frac{1}{x_1^2} = 1$;
d.h. für einen Würfel mit der Kantenlänge 1 dm benötigt man am wenigsten Material.
b) Oberflächeninhalt: $O = x^2 + 4xy$ (in dm^2)
Nebenbedingung: Volumen $x^2 \cdot y = 1$ (in dm^3), also
$y = \frac{1}{x^2}$
Zielfunktion: $O(x) = x^2 + \frac{4}{x}$; $x \ge 0$
$O'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$; $O''(x) = 2 + \frac{8}{x^3} > 0$
$O'(x) = 0$ liefert die Minimumstelle $x_1 = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}26$;
$y_1 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}63$.
Der Materialverbrauch ist minimal, wenn die Höhe halb so groß ist wie die Grundseite.

6 Oberfläche: $O = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$ mit $r, h \ge 0$,
Nebenbedingung: $\pi r^2 \cdot h = 1000$, d.h. $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
Zielfunktion: $O(r) = \frac{2000}{r} + \pi r^2$, $r \ge 0$
Globales Minimum für $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$; $h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$.
Der Blechverbrauch ist minimal, wenn der Radius und die Höhe gleich ($\approx 6{,}83\,cm$) sind.