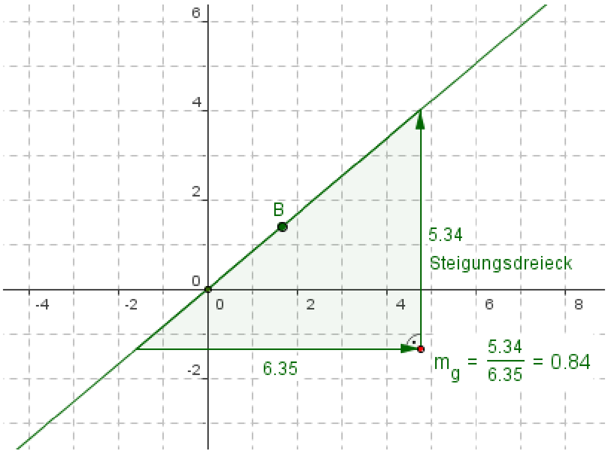
In der Mathematik geht es selten nur um Zahlen, sondern fast immer um Objekte - und um Zusammenhänge zwischen diesen Objekten, mit denen man die Natur beschreiben kann. Beispiele für solche Objekte sind Funktionen, Vektoren, Matrizen, Gleichungen, Gleichungssysteme, Gruppen ….

Das Steigungsdreieck einer Geraden



Siehe Skizze rechts.

Für das Dreieck gilt: $\tan(\alpha) = m = \frac{GK}{AK} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$

Alle Steigungsdreiecke einer Geraden sind ähnlich.

Steigung m, Steigungswinkel α

Die Steigung ist das, was auch im Straßenverkehr verwendet wird.
Der Steigungswinkel α lässt sich mit der Steigung m bestimmen: $m = \tan(\alpha)$. Oder $\alpha = \tan^{-1}(m)$

Wenn eine Straße 12% Steigung hat, so ist $m = 0{,}12 = 12\%$. Wenn ein Weg die Steigung 100% hat, ist der Steigungswinkel also 45°. Ein Weg kann also sehr wohl die Steigung 235% haben (dann ist der Steigungswinkel 67°).

Lineare Funktion

$g: \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}$

$x \mapsto \qquad = m \cdot x + c$

Eine lineare Funktion g ist durch genau zwei Parameter[1] bestimmt. Diese Parameter heißen **Steigung m** und **y-Achsenabschnitt c.** Kennt man diese beiden Parameter, so ist die Funktion g an jeder Stelle berechenbar, die Funktion ist also bekannt. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Graph einer Funktion

Der Graph einer beliebigen reellen Funktion f besteht aus den unendlich vielen Punkten der Menge $G_f = \{(x \mid f(x)) \mid x \in D\}$[2]. Die (maximale) Definitionsmenge einer Geraden ist stets $D = \mathbb{R}$.
(Eine Menge ist ein Graph, wenn jedes x höchstens einmal auftritt)

Wie bestimmt man die Parameter m und c?

Eine lineare Funktion (oder eine Gerade) ist durch Angabe von zwei Punkten $A(a_x \mid a_y)$ und $B(b_x \mid b_y)$ bestimmt. Für die Steigung der Gerade durch A und B gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$. Damit kann man m berechnen.
Jetzt benötigen wir noch eine Gleichung, um c zu bestimmen. Wir haben zwei Möglichkeiten
Entweder Punktprobe: Wir setzen die beiden Werte $y = a_y$ und $x = a_x$ in die Gleichung $y = m \cdot x + c$ und lösen sie nach c auf, d.h. aus $a_y = m \cdot a_x + c$ wird $c = a_y - m \cdot a_x$

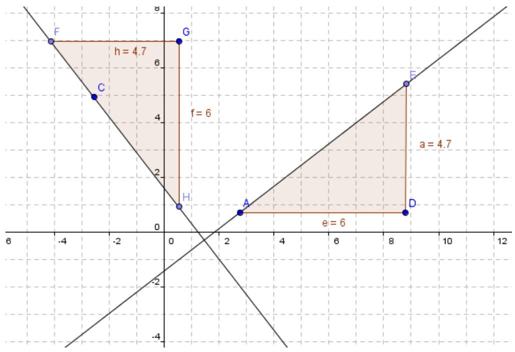
[1] Parameter von Funktionen sind Variable, die Funktionen unterscheiden. Wenn wir die Funktionen „auswerten", dann haben die Parameter feste Werte, die sich nicht ändern. Mit den Parametern können wir zwischen verschiedenen aber ähnlichen Funktionen unterscheiden, siehe etwa http://www.merriam-webster.com/dictionary/parameter

[2] D = Definitionsmenge, die Zahlen, für die die Funktion definiert ist. In der Schule ist dies meist eine Teilmenge der reellen Zahlen. Die Definitionsmenge der Hyperbel 1/x besteht aus allen von Null verschiedenen Zahlen.

Oder: Jeder Punkt $R(x\,|\,y)$, der zur Geraden gehört, muss mit $\mathrm{A}(\mathrm{a_x}\,|\,\mathrm{a_y})$ ein Steigungsdreieck der Steigung m bilden. Also gilt $\frac{\mathrm{y}-\mathrm{a_y}}{\mathrm{x}-\mathrm{a_x}}=\mathrm{m}$, d.h. $\mathrm{y}-\mathrm{a_y}=\mathrm{m}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{a_x})$ oder $\mathrm{g(x)}=\mathrm{m}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{a_x})+\mathrm{a_y}$. Damit ist der Parameter $\mathrm{c}=\mathrm{a_y}-\mathrm{m}\cdot\mathrm{a_x}$

Zueinander senkrechte Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind genau dann senkrecht, wenn für ihre Steigungen gilt $\mathrm{m_1}\cdot\mathrm{m_2}=-1$ (siehe Skizze rechts)



Ableitung:

Es gibt Funktionen, die bei Vergrößerung stückweise so aussehen wie eine Gerade. Diese Funktion kann man lokal näherungsweise durch eine Gerade ersetzen: Linearisieren einer Funktion. Die Steigung dieser Näherungsgeraden ist die Ableitung, die Näherungsgerade ist die Tangente.

Sekantensteigung, Differenzenquotient

Wenn man die Steigung der Tangente bestimmen will, muss man einen Umweg machen. Man bestimmt die Steigung vieler Sekanten. Sucht man die Tangente im Punkt $P(x|f(x))$, so wählt man für jedes h (für alle kleinen h) den zweiten Punkt $Q_h((x+h)|f(x+h))$

Der Differenzenquotient $m_h=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist die Steigung der Sekante durch P und Q_h

Grenzwert

Eine Folge ist eine Menge von abzählbar unendlich vielen Zahlen, bei der es auf die Reihenfolge ankommt – oder besser: eine Abbildung der natürlichen Zahl in die Menge der reellen Zahlen.

Wenn man die Folge 0,3 / 0,33 / 0,333 / … betrachtet, so weiß man, dass jede dieser Zahlen kleiner als 1/3 ist, aber immer weniger kleiner. (Außerdem werden die Zahlen immer größer.) Wenn man Folgeglieder mit immer mehr Dreiern betrachtet, so unterscheiden sich diese immer weniger von 1/3.

Man sagt, die Folge konvergiert gegen 3. Man schreibt $0{,}333..3 \to \frac{1}{3}$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}\underset{n\ \text{3er}}{33...3}=\frac{1}{3}$

Damit ist 0,9999…. = 1!
Der Grenzwert einer Folge ist oft eine Zahl, die in der Folge nicht vorkommt.
Etwa auch: Die Folge 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … hat den Grenzwert 0.

Man schreibt oft $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ oder $\left(\frac{1}{n}\right)_n \to 0$. Bitte verwechselt die beiden Schreibweisen nicht.

Ebenso können die Steigungen der Sekanten mit immer kleiner werdendem h sich immer mehr einer Zahl annähern. In diesem Fall sagt man die Folge $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ konvergiert gegen diese Zahl.
Wichtig: Dies gilt nicht für alle Funktionen! Bei Funktionen, die Ecken haben, gilt dies nicht.
(Und dies wirklich klar zu erklären und zu verstehen, erfordert viel Zeit und viel Nachdenken.)
Für den Grenzwert der Differentialquotienten schreibt man

$f'(x)=\frac{df}{dx}=\lim\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$. Man nennt die Ableitung auch Differentialquotient.

Beispiel einer Tangentensteigung

Wenn $f(x)=3x^2-1$ ist, dann gilt für den Differenzenquotienten, d.h. die Steigung der Sekanten

$$m_h=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(3(x+h)^2-1\right)-\left(3x^2-1\right)}{h}=\frac{\left(3\left(x^2+2xh+h^2\right)-1\right)-\left(3x^2-1\right)}{h}=$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-1-3x^2+1}{h}=\frac{6xh+3h^2}{h}=6x+3h$$

Es ist sicher naherliegend, dass diese Funktion sich immer weniger von 6x unterschiedet, wenn h immer kleiner wird. Also ist der Grenzwert 6x.

Wenn man dieses Vorgehen allgemeiner durchführt, konkret für Funktionen $f(x)=\alpha x^n+c$, stellt man fest, dass die Ableitung von $f(x)=\alpha x^n+c$ gleich $f'(x)=\alpha\cdot nx^{n-1}$ ist. Diese Formel habt ihr gelernt. Wir werden dies demnächst noch mit der Produktregel beweisen.

Tangente an eine Funktion f im Punkt a

Die Tangente t an eine Funktion f im Punkt a ist.

$$t(x)=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$$

(Unterschiede zwischen a und x!!! Die Zahl a ist der x-Wert des Punktes, an dem die Tangente die Funktion f berührt, x ist die Funktionsvariable x der Tangentenfunktion t(x).)

Beispiel: Bestimme die Tangente an $f(x)=3x^3+2\sqrt{x}$ im Punkt A(1,2 / …)

1. Schritt: Die Ableitung von $f(x)=3x^3+2\sqrt{x}=3x^3+2x^{\frac{1}{2}}$ ist $f'(x)=3\cdot 3x^2+2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=9x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. Schritt: $f'(1,2)=6\cdot 1,2^2+\frac{1}{\sqrt{1,2}}=13,87$

3. Schritt: $f(1.2)=3\cdot 1.2^3+2\sqrt{1.2}=7.37$

4. Schritt: $t(x)=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)=13,87\cdot(x-1.2)+7.37=13,87x-9,27$

Normale einer Funktion f im Punkt a

Mitunter (eher selten) wird nicht die Tangente gesucht, sondern die Normale, d.h. die Funktion, die senkrecht auf der Tangente steht. (Aufgabenbeispiel: Bestimme den Lichtstrahl, der senkrecht auf eine Stelle eines Berges einfällt.)

Dies geht im Prinzip gleich wie das Aufstellen einer Tangente, nur muss die Steigung der Tangente, d.h. $m_t=f'(a)$ durch die Steigung der Normalen: $m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{f'(a)}$ ersetzt werden. Also

$$n(x)=-\frac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)+f(a)$$

Steigung, Tangente und Ableitung einer Funktion veranschaulichen

Mit Geogebra kann man recht einfach die Tangente an eine Funktion im Punkt $F(a,f(a))$ zeichnen. Außerdem kann man die Steigung der Tangente $m=f'(a)$ und den zugehörigen Punkt der Ableitungsfunktion, den Punkt $P(a\,|\,m)=P(a\,|\,f'(a))$ zeichnen.

Beispiel für Deinen PC: Kopiere die 105a_Ableitungsfunktion1a.ggb (Parabel 3. Ordnung) auf Deinen PC, hole Dir etwa Geogebra Portable (siehe), entpacke und starte es; lade das ggb-File. Ändere mit dem Schieberegler oben links, den x-Wert des Punktes, d.h. den Parameter a, auf der Funktion, an der die

Tangente bestimmt wird. Der angezeigte Parameter m ist die Steigung der Tangente, der Punkt P ist der Punkt der Ableitungsfunktion, also $P(a,m)=P(a,f'(a))$. Wird der Parameter mit dem Schieberegler verändert, so wird jeweils der zughörige Punkt P rot gezeichnet und bleibt erhalten (Animation von Geogebra).
Variante für eine Parabel 4. Ordnung: 105b_Ableitungsfunktion1b.ggb.
Weiteres Beispiel http://www.geogebra.org/de/examples/funktion_steigung/funktion_steigung1.html
(Evtl. kannst Du dieses Programm allerdings nicht starten, weil heutzutage Java von vielen Browsern nicht mehr problemlos gestartet wird.)

Aufgaben

Aufgabe 1: Bestimme die lineare Funktion, die durch den Punkt P(1/0,5) geht und die Steigung $m=\frac{1}{3}$ hat. Zeichne den zughörigen Graphen und ein Steigungsdreieck
(Variante: Durch P(-2/1) und m=-2)
Aufgabe 2: Zeichne eine Gerade, durch P(1/2) und Q(4/-2). Wie groß ist m? Wie lautet die zugehörige lineare Funktion?
Aufgabe 3: Zeichne durch P(1/-2) eine Gerade mit dem Steigungswinkel 60°, -30°. Wie lautet die zugehörige lineare Funktion?
Aufgabe 4: Wie lautet die Tangente an die Hyperbel in a = 2, wie ihre Normale?
Aufgabe 5: Wie lautet die Tangente an die Sinus-Funktion in $a=\pi$? Wie ihre Normale?
Aufgabe 6: Wie lautet die Tangente an eine Parabel 2. Ordnung (3. und 4. Ordnung´) in a = 1, wie ihre Normale?