Die wichtigsten Ableitungsregeln

1) Die Ableitung von $f(x)=x^n$ ist $f'(x)=nax^{n-1}$, kurz $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$
2) Viele Funktionen kann man vor dem Ableiten auf die Form $f(x)=ax^n$ bringen.
   Wichtige Beispiele: $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ oder $f(x)=\frac{a}{b\sqrt{x}}=\frac{a}{b}x^{-\frac{1}{2}}$ oder $f(x)=\frac{a}{b\cdot x^n}=\frac{a}{b}\cdot x^{-n}$
3) $\sin'(x)=\cos(x)$ und $\cos'(x)=-\sin(x)$
4) $\left(e^x\right)'=e^x$ und $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

Beispiele

5) $\left(x^7\right)'=7x^6$ oder $\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}-1}=-\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{7}{4}}$
6) $\left(\sqrt{2}x^{-1}+\frac{1}{5}x^{\frac{3}{7}}\right)'=-\sqrt{2}x^{-2}+\frac{1}{5}\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}=-\frac{\sqrt{2}}{x^2}+\frac{3}{35\sqrt[7]{x^4}}$

Oft muss man die Terme VOR DEM ABLEITEN umformen

7) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}$
   Vor dem Ableiten müssen wird die Wurzel mit der Potenzrechnung umformen.
   $f(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
8) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{2x}}$
   Vor dem Ableiten müssen wird die Wurzel mit der Potenzrechnung umformen.
   $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{2x}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}x^{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}$
9) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\frac{3x^2-4x+2\sqrt{x}}{3x}$
   Wenn wir $f(x)=\frac{3x^2-4x+2\sqrt{x}}{3x}$ ableiten, sollten wir den Term vor dem Ableiten in Summanden zerlegen: $f(x)=\frac{3x^2}{3x}-\frac{4x}{3x}+\frac{2\sqrt{x}}{3x}=x-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$. Dann gilt:
   $k'(x)=1+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
   Damit ergib sich die Ableitung ganz einfach. Diesen Trick können wir oft sinnvoll einsetzen.

10) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\frac{5x^2+\sqrt{x}-4}{2\sqrt{3x}}$
   Wenn wir diese Funktion ableiten, müssen wir zuvor den Term in Summanden zerlegen und die

Wurzeln mit Hilfe der Potenzrechnung auf die Form x^n bringen.

$$f(x)=\frac{5x^2+\sqrt{x}-4}{2\sqrt{3x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}-\frac{4}{2\sqrt{3}\sqrt{x}}=\frac{5}{2\sqrt{3}}x^{2-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{4}{2\sqrt{3}}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+0-\frac{4}{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{5}{4}\sqrt{3x}+\frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Wichtige Ableitungsregeln

11) Summen- und Faktorregel (Linearität)
    Wenn r und s Konstanten sind, also kein x enthalten: $(r\cdot f(x)+s\cdot g(x))'=r\cdot f'(x)+s\cdot g'(x)$
    Wenn r und s Konstanten enthalten, muss man die Produktregel verwenden.
    Nebenbei: Selbstverständlich kann man diese obige Funktion auch mit der Produktregel ableiten.
12) **Produktregel**: Wenn beim Ausrechnen die letzte Operation eine Multiplikation von zwei Termen ist, die beide x enthalten, d.h.
    Wenn $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ ist, dann gilt $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
13) Quotientenregel (freiwillig)
    Wenn $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ ist, dann gilt $f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
14) **Kettenregel** (sehr wichtig). Werden zwei Funktionen hintereinander ausgeführt, d.h.
    Wenn $f(x)=g(h(x))$ ist, dann gilt $f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$

Beispiele

15) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\sqrt{ax^2-3a^2}$
    Um die Ableitung von $f(x)=\sqrt{ax^2-3a^2}$ zu bestimmen, benötigen wir die Kettenregel. Die äußere Funktion ist die Wurzel, die innere der Radikand, d.h. der Term unter der Wurzel – beachte dabei, dass nach x abgeleitet wird, nicht nach a!) Es gilt also:
    $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{ax^2-3a^2}}\cdot 2ax=\frac{ax}{\sqrt{ax^2-3a^2}}$$
16) Bestimme die Ableitung von $f(x)=\left(3x^3+\frac{4}{x^2}\right)\cdot\sin(x)$
    Da die Funktion das Produkt zweier Funktionen ist, benötigen wir die Produktregel
    $$f'(x)=\left(3x^3+\frac{4}{x^2}\right)'\cdot\sin(x)+\left(3x^3+\frac{4}{x^2}\right)\cdot(\sin(x))'=$$
    $$=\left(9x^2-8\cdot x^{-3}\right)\cdot\sin(x)+\left(3x^3+\frac{4}{x^2}\right)\cdot\cos(x)=\left(9x^2-\frac{8}{x^3}\right)\cdot\sin(x)+\left(3x^3+\frac{4}{x^2}\right)\cdot\cos(x)$$
17) Bestimme die Ableitung von $h(x)=\frac{2}{x^2}\sqrt{3x^4+2x}$
    Um die Ableitung zu bestimmen, können wir die Quotientenregel anwenden oder die Produktregel, wenn wir beachten, dass $\frac{2}{x^2}=2\cdot x^{-2}$. Das weitere Umformen bei der Produktregel ist meist einfacher als das bei der Quotientenregel. Um die Wurzel abzuleiten, benötigen wir immer zusätz-

lich die Kettenregel. Damit ergibt sich:

$$h'(x) = -4x^{-3} \cdot \sqrt{3x^4+2x} + 2x^{-2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^4+2x}} \cdot (12x^3+2) =$$

$$= \frac{-4\sqrt{3x^4+2x}}{x^3} + \frac{12x^3+2}{x^2\sqrt{3x^4+2x}}$$

18) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^3}$

Wieder formen wir vor dem Ableiten um: $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^3} = 3 \cdot (2x+1)^{-3}$

Also ist $f'(x) = 3 \cdot (-3) \cdot (2x+1)^{-4} \cdot 2 = \frac{-18}{(2x+1)^4}$ (wir benötigen die Kettenregel)

Anwendungen der Ableitung

19) Lokale Änderungsrate einer Funktion f in a ist f'(a) (= Steigung der Tangente)

Mittlere Änderungsrate einer Funktion f zwischen b und c ist $\frac{f(c)-f(b)}{b-c}$ (= Steigung der Sekante zwischen b und c

20) Winkel der Funktion mit der x-Achse: $\tan(\alpha) = f'(a)$

21) Wenn sich die Graphen zweier Funktionen f und g in x berühren, dann gilt $f'(x) = g'(x)$ und natürlich $f(x) = g(x)$

22) Wenn eine Funktion f in x einen Extrempunkt hat, so ist notwendigerweise die Ableitung an dieser Stelle Null, d.h. wenn ein Extrempunkt vorliegt, dann gilt: $f'(x) = 0$.

Ändert sich das Vorzeichen der Ableitungsfunktion von + nach -, so haben wir einen Hochpunkt (oder es gilt die hinreichende Bedingung f''(x)<0). Ändert es sich von – nach +, so liegt ein Minimum vor (oder es gilt die hinreichende Bedingung f''(x)>0.

23) Die Wendepunkte von f sind die Extremstellen von f'.

24) Ist die Ableitung in einem Bereich größer Null, so ist die Funktion dort monoton steigend.