I Grundlagen der Differenzialrechnung

1 Ableitung und Ableitungsfunktion

Seite 8

Einstiegsaufgabe

a) Zum Beispiel ist im Zeitintervall [0; 8] die mittlere Geschwindigkeit:
$v = \frac{200\,m - 0\,m}{8\,s - 0\,s} = 25\frac{m}{s}$.

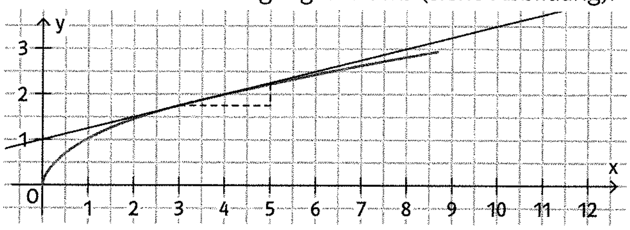
b) Um die momentane Geschwindigkeit zu einem vorgegebenen Zeitpunkt a zu bestimmen, berechnet man die mittlere Geschwindigkeit für immer kleiner werdende Intervalle $[a - h; a + h]$ mit $h \to 0$. Der Grenzwert dieser mittleren Geschwindigkeiten ist die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt a.

c) Die mittlere Geschwindigkeit ist die durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen zwei verschiedenen Zeitpunkten. Grafisch ist diese als Steigung der Sekante, die Verbindungsstrecke zweier Punkte, darstellbar.
Die momentane Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt, grafisch ist diese als Steigung der Tangente in dem zugehörigen Punkt darstellbar.

Seite 9

1 a) Die Funktionswerte an den Stellen $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$ werden durch Ablesen ermittelt: $f(5) \approx 2{,}2$ und $f(3) \approx 1{,}7$.

b) Die Differenz ist $f(5) - f(2) \approx 0{,}5$; das entspricht der kleineren Seite des Steigungsdreiecks (siehe Abbildung).



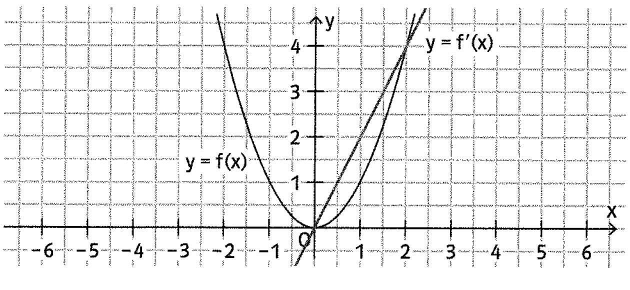
c) $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \approx 0{,}25$; das ist die Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(3\,|\,1{,}7)$ und $P_2(5\,|\,2{,}2)$.

d) $f'(5) \approx 0{,}2$; das ist die Steigung der Tangente in $P_2(5\,|\,2{,}2)$.

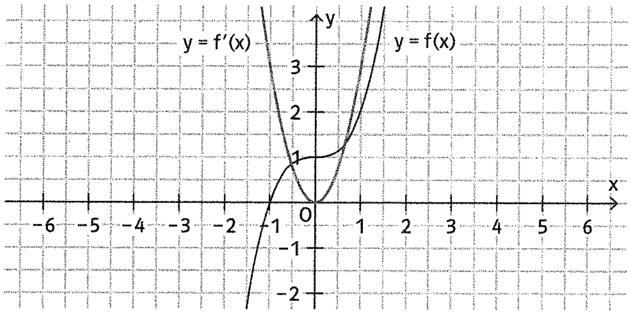
2 Folgende Paare gehören zusammen: A3; B4; C2; D1.

Seite 10

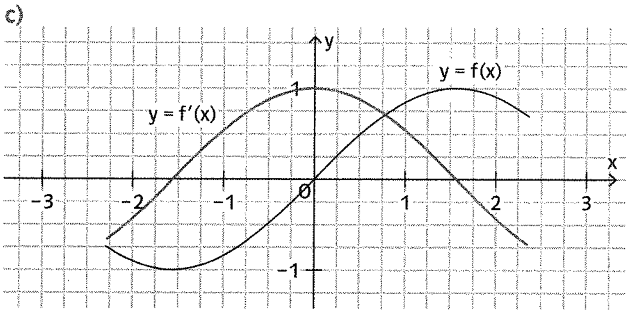
3 a)



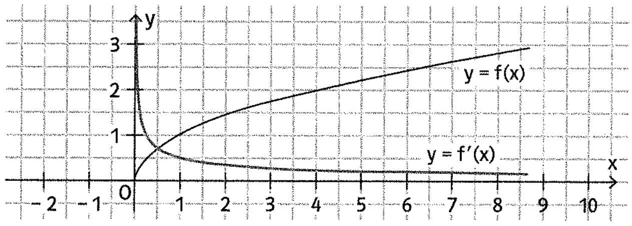
b)



c)



d)



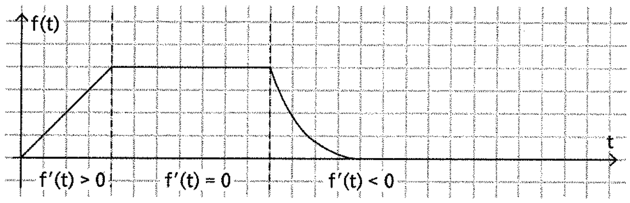
4 a) Individuelle Lösung, z. B.: $f(x) = -x$

b) $f(x) = x^2$

7 a) $f(5) = 81{,}2$ bedeutet, dass es im Jahr 2015 (2010 + 5) 81,2 Millionen Einwohner gab. $\frac{f(5{,}5) - f(5)}{5{,}5 - 5} \approx 0{,}7$ bedeutet, dass im ersten Halbjahr des Jahres 2015 die mittlere Änderungsrate 0,7 Millionen Einwohner pro Jahr betrug.

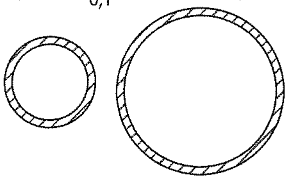
b) Ende des Jahres 2015 waren ca. 81,9 Millionen Einwohner zu erwarten.

8



Während des Füllvorgangs ist die Änderung der Wassermenge und somit auch die Steigung von f(t) konstant positiv, während des Baden gleich null. Beim Leerlaufen der Wanne ist die Steigung von f(t) negativ.

10 a) $V(10) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1000 \approx 4188{,}8$; $V(10{,}1) \approx 4315{,}7$
$V(10{,}1) - V(10) \approx 126{,}9$
Das Volumen vergrößert sich um ca. 127 Volumeneinheiten.
b) $\frac{V(10{,}1) - V(10)}{0{,}1} \approx 1269$; $\frac{V(20{,}1) - V(20)}{0{,}1} \approx 5052$;



Die mittlere Änderungsrate beschreibt die Volumenzunahme der Kugeln bei einer Vergrößerung des Radius um 0,1. Da der Oberflächeninhalt der größeren Kugel viermal so groß ist wie der der kleineren Kugel, ist die mittlere Änderungsrate der größeren Kugel etwa viermal so groß wie die der kleineren.

c) $\frac{V(r_0 + h) - V(r_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{4}{3}\pi (r_0 + h)^3 - \frac{4}{3}\pi r_0^3\right)$
$= \frac{4\pi}{3h}\left(r_0^3 + 3r_0^2 h + 3r_0 h^2 + h^3 - r_0^3\right)$
$= \frac{4\pi}{3}\left(3r_0^2 + 3r_0 h + h^2\right)$

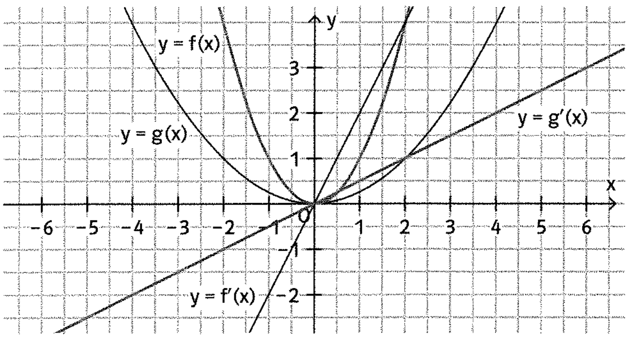
Momentane Änderungsrate ($h \to 0$): $4\pi r_0^2$.
Dies ist der Oberflächeninhalt einer Kugel mit Radius r_0.

2 Ableitungsregeln, höhere Ableitungen

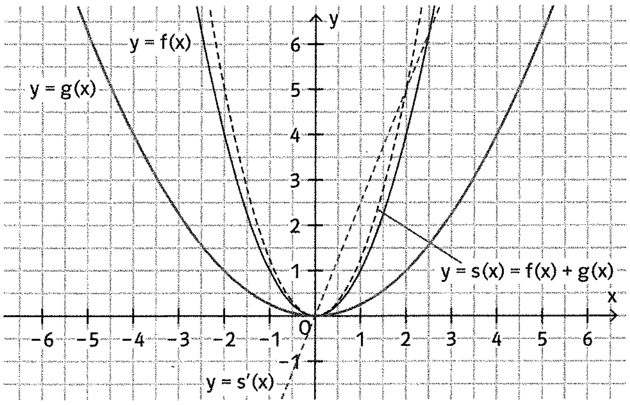
Seite 11

Fehler im 1. Druck der 1. Auflage des Schülerbuches: Es muss „Skizzieren Sie den Graphen der Funktion s mit $s(x) = f(x) + g(x)$ sowie den Graphen von s'." heißen (s' statt S').

Einstiegsaufgabe
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion s mit s (x) = f (x) + g (x) sowie den Graphen von s'.



An jeder Stelle $x \neq 0$ ist die Steigung von f betragsmäßig größer als die von g. Daher gehört die steilere Gerade zur Ableitung von f' und die flachere Gerade zu g'.



Vermutung: $s'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Durch die Addition der Funktionswerte von f und g steigt der Graph von s betragsmäßig stärker als die Graphen von f und g. Offensichtlich addieren sich die Tangentensteigungen (und damit die Ableitungen) an jeder Stelle.

Seite 12

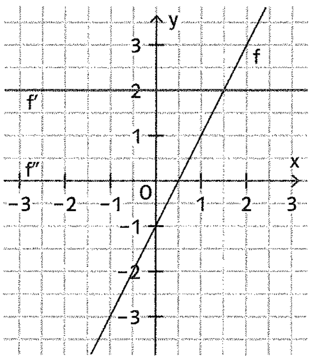
1 a) $f'(x) = 8x + 2$; $f''(x) = 8$
b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = x - \frac{3}{2}$
c) $f'(x) = -2\sin(x)$; $f''(x) = -2\cos(x)$
d) $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2$; $f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$
e) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$
f) $f'(x) = 2x^{-3} + 3$; $f''(x) = -6x^{-4}$
g) $f'(x) = -15x^{-4} - \frac{3}{5}x^2 = -\frac{15}{x^4} - \frac{3x^2}{5}$;
$f''(x) = 60x^{-5} - \frac{6}{5}x = \frac{60}{x^5} - \frac{6}{5}x$
h) $f'(x) = 0$; $f''(x) = 0$
i) $f'(x) = 0$; $f''(x) = 0$

2 a) $f(x) = x^2 - 3x$; $f'(x) = 2x - 3$; $f''(x) = 2$
b) $g(x) = x^2 + 8x + 16$; $g'(x) = 2x + 8$; $g''(x) = 2$
c) $u(v) = v^4 - 2v^{-3}$; $u'(v) = 4v^3 + 6v^{-4} = 4v^3 + \frac{6}{v^4}$;
$u''(x) = 12v^2 - 24v^{-5} = 12v^2 - \frac{24}{v^5}$
d) $h(a) = a^2 + 1$; $h'(a) = 2a$; $h''(a) = 2$ $(a \neq 0)$
e) $k(t) = -2t^2 + 12t - 16$; $k'(t) = -4t + 12$; $k''(t) = -4$
f) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x$; $f'(x) = 6x - \frac{1}{2}$; $f''(x) = 6$ $(x \neq 0)$

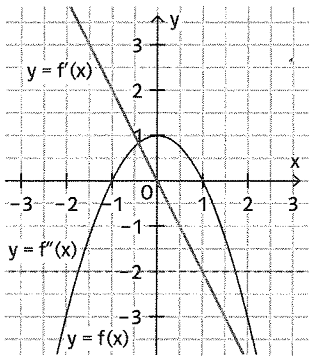
3 a) $f'(x) = 2$; $f''(x) = 0$
b) $f'(x) = -2x$; $f''(x) = -2$
c) $f'(x) = x^2$; $f''(x) = 2x$
d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(x) = \frac{2}{x^3}$

Graphen:

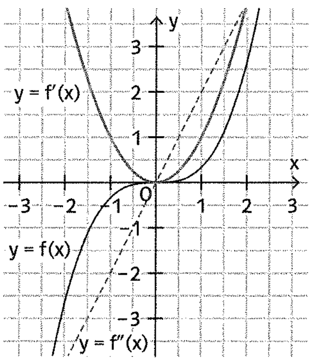
a)



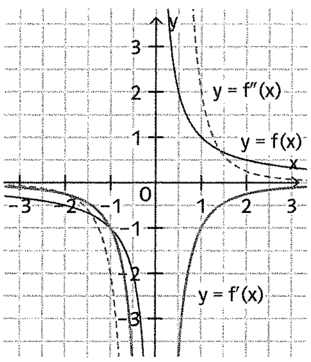
b)



c)



d)



4 a) (1) P(1|4) (2) $P_1(2|10)$; $P_2\left(-\frac{2}{3}\middle|2\frac{8}{9}\right)$

b) $y = 2x + 1{,}5$

5 a) Richtig.

b) Falsch. Der grüne Graph ist der von f', der blaue ist nicht der von f'', da z.B. an der Stelle $x_0 = 1$ die Steigung von f' mindestens 5 ist, f''(1) hingegen 1 ist.

c) Falsch. Der grüne Graph ist der von f', der blaue ist nicht der von f'', da der blaue Graph konstant ist und daher f' überall eine konstante Steigung haben müsste.

Seite 13

8

f(x)	$-2x^7 + x^2$	$2\cos(x) + 3$	$\frac{1}{4}x^4 - x^2$	$\frac{2}{3}x^3 + x^2$	$\sin(x) - \frac{1}{2}x^2$
f'(x)	$-14x^6 + 2x$	$-2\sin(x)$	$x^3 - 2x$	$2x^2 + 2x$	$\cos(x) - x$
f''(x)	$-84x^5 + 2$	$-2\cos(x)$	$3x^2 - 2$	$4x + 2$	$-\sin(x) - 1$

9 a) Falsch. Es ist $f(x) = x^5$ und damit $f'(x) = 5x^4 \neq 3x^2 \cdot 2x$.

b) Falsch, z.B. haben bei der Funktion f mit $f(x) = x^2$ f und f' gleich viele Schnittstellen mit der x-Achse.

c) Ja, die Potenzregel gilt sogar für reelle Exponenten ungleich null.

d) Nein, die Potenzregel gilt nur für Potenz-, aber nicht für Exponentialfunktionen.

e) Falsch, so haben f und g mit $f(x) = g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, die gleiche Ableitung.

10 f': Graph C; g': Graph A; h': Graph B

11 Die Graphen der beiden Funktionen sind um c in y-Richtung gegeneinander verschoben.

13 a) V(h): Volumen eines Zylinders mit Grundkreisradius r und (variabler) Höhe h

$V'(h) = \pi r^2$: Flächeninhalt des Grundkreises

b) V(r): Volumen eines Zylinders mit (variablem) Grundkreisradius r und Höhe h

$V'(r) = 2\pi r h$: Flächeninhalt des Mantels des Zylinders

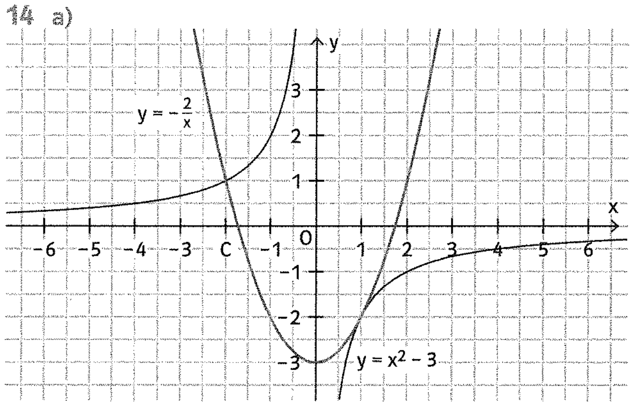
c) A(r): Flächeninhalt eines Kreises mit (variablem) Radius r

$A'(r) = 2\pi r$: Umfang des Kreises

d) V(r): Volumen einer Kugel mit (variablem) Radius r

$V'(r) = 4\pi r^2$: Oberflächeninhalt der Kugel

14 a)



b) Die (nach oben geöffnete) Normalparabel hat einen Funktionsterm der Form $g_t(x) = x^2 + t$; $t \in \mathbb{R}$.

Bedingung für „berühren": $f(x_0) = g_t(x_0)$ und $f'(x_0) = g_t'(x_0)$.

Mit $f'(x) = \frac{2}{x^2}$; $g_t'(x) = 2x$ erhält man:

$f'(x_0) = g_t'(x_0) \Leftrightarrow \frac{2}{x_0^2} = 2x_0$; Lösung: $x_0 = 1$

$f(1) = g_t(1) \Leftrightarrow -2 = 1 + t$; Lösung $t = -3$

Damit: Berührpunkt B(1|−2);

Gleichung der Parabel: $y = x^2 - 3$

3 Verkettung von Funktionen

Seite 14

Einstiegsaufgabe

$f(c(k)) = 1{,}8 \cdot (k - 273) + 32 = 1{,}8k - 459{,}4$

Seite 15

1 a) $u(v(x)) = 10x$; $v(u(x)) = 10x$

b) $u(v(x)) = 3x - 3$; $v(u(x)) = 3x - 1$

c) $u(v(x)) = 9x^2$; $v(u(x)) = -3x^2$

d) $u(v(x)) = \sin(2x - 1)$; $2\sin(x) - 1$

e) $u(v(x)) = \sqrt{x^2} = x$; $v(u(x)) = x$

f) $u(v(x)) = \frac{2}{x-1}$; $v(u(x)) = \frac{2}{x} - 1$

2 $(u + v)(x) = x^2 + x + 2$; $(u \cdot v)(x) = x^2(x + 2)$;
$(u \circ v)(x) = (x + 2)^2$; $(w \cdot v)(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 2)$;
$(w \circ v)(x) = \sqrt{x + 2}$

3

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4	2	1	3	1	2	3	4
g(x)	−1	1	−1	0	1	0	1	−2

4

	v(x)	u(x)	f(x)
a)	x^3	$3x+1$	$3x^3+1$
b)	x^2+1	x^2	$(x^2+1)^2$
c)	x^2-4	$\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{2(x^2-4)}$
d)	$3-0{,}5x$	$2\sqrt{x}$	$2\sqrt{3-0{,}5x}$

5

	f(x) = u(v(x))	g(x) = v(u(x))
a)	$1-(1-x)^4$	$(1-(1-x^2))^2 = x^4$
b)	$(x+1-1)^2 = x^2$	$(x-1)^2+1 = x^2-2x+1$
c)	$\sin(x+1)$	$\sin(x)+1$
d)	$\sqrt{2(x-1)}$	$\sqrt{2x}-1$
e)	$\frac{1}{\cos(x)+1}$	$\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)$
f)	1	1

Seite 16

6 a) $v(x) = x^2-1;\ u(x) = \frac{1}{x}$
b) $v(x) = \frac{1}{x^2};\ u(x) = x-1$
c) $v(x) = \sin(x);\ u(x) = x^2$
d) $v(x) = x^2;\ u(x) = \sin(x)$
e) $v(x) = x+3;\ u(x) = \sqrt{x}$
f) $v(x) = 3x;\ u(x) = \sqrt{x}$
g) $v(x) = x-3;\ u(x) = 2^x$
h) $v(x) = 2^x;\ u(x) = x-3$

9 Radius $r(t) = 1{,}5t$ (in cm)
Flächeninhalt $A(r) = \pi r^2$ (in cm^2)
$A(t) = \pi(1{,}5t)^2 = 2{,}25t^2$

10 a) Bei Neubespannung $(t=0)$: $s(0) = 50+15 = 65$;
$r(s(0)) = 0{,}04\cdot 65+1{,}8 = 4{,}4$
Nach 4 Tagen $(t=4)$: $s(4) = 50+\frac{30}{6} = 55$;
$r(s(4)) = 0{,}04\cdot 55+1{,}8 = 4{,}0$
Die Rückschlagskraft hat also um 0,4 lb abgenommen.
b) $r(t) = r(s(t)) = 0{,}04s(t)+1{,}8 = 0{,}04\cdot\left(50+\frac{30}{t+2}\right)+1{,}8$
$= 3{,}8+\frac{1{,}2}{t+2}$

11 a) $u(v(0)) = 0;\ v(u(0)) = 1$
$u(v(0{,}5)) = 1;\ v(u(0{,}5)) = 0$
$u(v(1)) = 0;\ v(u(1)) = 1$
b) $u(v(x)) = -4(-x+1-0{,}5)^2+1 = -4(-x+0{,}5)^2+1$
$= -4x^2+4x$
$v(u(x)) = -(-4(x-0{,}5)^2+1)+1 = 4(x-0{,}5)^2$

14 a) $(u\circ v)(x) = 2(-x+2)-1 = -2x+3$
$(v\circ u)(x) = -(2x-1)+2 = -2x+3$
$(u\circ w)(x) = 2(3x-2)-1 = 6x-5$
$(w\circ u)(x) = 3(2x-1)-2 = 6x-5$
b) $u(x) = a_1x+b_1;\ v(x) = a_2x+b_2$
$u(v(x)) = a_1(a_2x+b_2)+b_1 = a_1a_2x+a_1b_2+b_1$
$u(v(x))$ hat die Form $ax+b$, also ist $u\circ v$ eine lineare Funktion.
c) $f(g(x)) = 9(3x+a)+2 = 27x+9a+2$
$g(f(x)) = 3(9x+2)+a = 27x+6+a$
$f\circ g = g\circ f$, wenn $9a+2 = 6+a$ ist und somit wenn $a = 0{,}5$ ist.
d) Mit u und v aus b) erhält man
$v(u(x)) = a_2(a_1x+b_1)+b_2 = a_2a_1x+a_2b_1+b_2$.
$u\circ v = v\circ u$, wenn $a_1b_2+b_1 = a_2b_1+b_2$, also
$a_1b_2-b_2 = a_2b_1-b_1$ bzw. $b_2(a_1-1) = b_1(a_2-1)$
und damit $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1-1}{a_2-1}$.

4 Kettenregel

Seite 17

Einstiegsaufgabe
$f(x) = u(v(x));\ f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$

Seite 18

1 $f'(x) = 8\cos(4x)$;
$g'(x) = 0{,}5\cdot 4\cdot(-3)\cdot(1-3x)^3 = -6(1-3x)^3$

2 a) $f'(x) = 4(x+2)^3$
b) $f'(x) = 24(8x+2)^2$
c) $f'(x) = -15\left(\frac{1}{2}-5x\right)^2$
d) $f'(x) = x(x^2-5)$
e) $f'(x) = -8(8x-7)^{-2}$
f) $f'(x) = 4(5-x)^{-5}$
g) $f'(x) = -30(15x-3)^{-3}$
h) $f'(x) = -2\cdot(15-6x)(15-3x^2)^{-3}$

3 a) $f(x) = (x-1)^{-3};\ f'(x) = -3(x-1)^{-4} = -\frac{3}{(x-1)^4}$
b) $f(x) = (1-x)^{-3};\ f'(x) = 3(1-x)^{-4} = \frac{3}{(1-x)^4}$
c) $f(x) = (3x+2)^{-2};\ f'(x) = -6(3x+2)^{-3} = -\frac{6}{(3x+2)^3}$
d) $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-2};\ f'(x) = -\frac{2}{3}(x+2)^{-3} = -\frac{2}{(3x+2)^3}$
e) $f(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}};\ f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$
f) $f(t) = (3t+1)^{\frac{1}{2}};\ f'(t) = \frac{3}{2}(3t+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3t+1}}$
g) $f(x) = (5x^2+1)^{\frac{1}{2}};\ f'(x) = 5x(5x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}$
h) $g(t) = (\sin(t))^{-1};\ g'(t) = -(\sin(t))^{-2}\cdot\cos(t) = -\frac{\cos(t)}{(\sin(t))^2}$

4 Fehler bei A: Die innere Ableitung ist falsch und die Hochzahl bei f ist nicht als Faktor bei f′ berücksichtigt.
Richtig: $f'(x) = 12x^3(x^4+2)^2$.
Fehler bei B: Die innere Ableitung wurde vergessen und falsche Hochzahl als Vorzahl von f′.
Richtig: $f'(x) = 10(2x-5)^4$.
Fehler bei D: Das Argument von cos in f′(x) ist falsch.
Richtig: $f'(x) = 12\cos(3x)$.

Fehler bei E: Das Argument des cos in $f'(x)$ ist die innere Ableitung von $f(x)$ und muss somit der Vorfaktor von $f'(x)$ sein. Dieser Vorfaktor wurde vergessen. Das Argument von cos ist demzufolge auch falsch.
Richtig: $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

7 $f'(x) = 1{,}5(0{,}5x - 1)^2$, Nullstelle: 2; $f'(0) = 1{,}5$. Der Graph von f' ist eine Parabel durch die Punkte $P(0\,|\,1{,}5)$ und $Q(2\,|\,0)$ und somit ist es der Graph C.

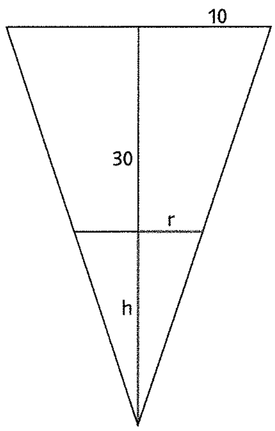
Seite 19

8 a) $f'(x) = (3x + 2)^2$; $f'(2) = 64$
b) $f'(x) = 0$: $x_1 = -\frac{2}{3}$; $Q\left(-\frac{2}{3}\middle|0\right)$
c) $f'(x) = 1$: $x_2 = -1$, $x_3 = -\frac{1}{3}$; $R\left(-1\middle|-\frac{1}{9}\right)$, $S\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{9}\right)$

9 a) $f(2) = u(v(2)) = u(0) = -2$;
$f'(2) = u'(v(2)) \cdot v'(2) = u'(0) \cdot (-4) = -4$
b) $g(2) = v(u(2)) = v(0) = 4$;
$g'(2) = v'(u(2))) \cdot u'(2) = v'(0) \cdot 1 = 0$
c) $u(x) = x - 2$; $v(x) = -x^2 + 4$
$f(x) = u(v(x)) = -x^2 + 2$; $f'(x) = -2x$
$g(x) = v(u(x)) = -(x - 2)^2 + 4 = -x^2 + 4x$; $g'(x) = -2x + 4$

10 a) $f'(x) = 2(ax^3 + 1)^1 \cdot 3ax^2 = 6ax^2(ax^3 + 1)$
b) $f'(x) = 2ax\cos(ax^2)$
c) $f'(x) = 2a\sin(ax) \cdot \cos(ax)$
d) $f'(x) = a^2\cos(a^2x)$
e) $f(x) = 3a \cdot (1 + x^2)^{-1}$;
$f'(x) = -3a(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{6ax}{(1 + x^2)^2}$
f) $f(x) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax = \frac{ax}{\sqrt{ax^2 - 3}}$
g) $f(a) = (ax^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$;
$f'(a) = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2) = \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{ax^2 - 3}}$
h) $g(x) = (t^2x + 2t)^{\frac{1}{2}}$;
$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (t^2x + 2t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t^2) = \frac{t^2}{2 \cdot \sqrt{tx^2 + 2t}}$

13 a) Strahlensatz: $\frac{r}{h} = \frac{10}{30}$
$\Leftrightarrow\ 30r = 10h\ \Leftrightarrow\ r = \frac{1}{3}h$
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \frac{1}{3}\pi\,\frac{1}{9}h^2 h$
$= \frac{1}{27}\pi h^3$
$V(t) = 20t = \frac{1}{27}\pi(h(t))^3$
$\Leftrightarrow\ h(t) = \sqrt[3]{\frac{540t}{\pi}}$
$h(60) = \sqrt[3]{\frac{540 \cdot 60}{\pi}} \approx 21{,}8$
Nach einer Minute steht das Wasser fast 22 cm hoch im Behälter.



b) Je höher der Wasserspiegel ist, desto größer ist die Grundfläche des pro Sekunde dazukommenden Kegelstumpfs. Bei gleicher Zuflussrate wird die Höhe des Kegelstumpfs immer kleiner; d.h. der Wasserspiegel steigt immer langsamer.

c) $h'(t) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{540t}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{540}{\pi} = \frac{180}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{540t}{\pi}\right)^2}}$
$h'(60) \approx 0{,}12$
Nach einer Minute steigt der Wasserspiegel um ca. 1,2 mm pro Sekunde.

14 a) Innere Funktion $v(x) = x^2$,
äußere Funktion $u(x) = g(x)$
Kettenregel
$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = g'(v(x)) \cdot v'(x) = g'(x^2) \cdot 2x$
b) $f_1'(x) = 3 \cdot g'(3x)$; $f_2'(x) = -g'(1 - x)$; $f_3'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot g'\left(\frac{1}{x}\right)$

15 a) $h(x) = g(x - 3)$; $h'(x) = g'(x - 3)$
Den Graphen von h' erhält man, indem man den Graphen von g' um 3 Einheiten nach rechts verschiebt, da alle Tangenten an den Graphen von h um 3 Einheiten nach rechts verschoben werden.
b) $f'(x) = 3\cos(3x)$; $f''(x) = -9\sin(3x)$
$f'''(x) = -27\cos(3x)$; $f''''(x) = 81\sin(3x)$
$f'''''(x) = 243\cos(3x)$
Vermutung: n gerade: $f^{(n)}(x) = \pm 3^n\sin(3x)$, dabei
$f^{(n)}(x) = +\,3^n\sin(3x)$, falls n teilbar ist durch 4;
n ungerade: $f^{(n)}(x) = \pm 3^n\cos(3x)$, dabei
$f^{(n)}(x) = +\,3^n\cos(3x)$, falls $n = 4 \cdot k + 1$, $k \geq 0$.

5 Produktregel

Seite 20

Einstiegsaufgabe
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$; $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Seite 21

1 a) $g'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
b) $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (4x + 1) + \sqrt{x} \cdot 4$
c) $k'(x) = 2\cos(4x) - (2x - 3) \cdot \sin(4x) \cdot 4$

2 a) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$
b) $f'(x) = 3 \cdot \cos(x) - 3x \cdot \sin(x)$
c) $f'(x) = 3 \cdot \sqrt{x} + (3x + 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + (2x - 3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos(x) - \sqrt{x} \cdot \sin(x)$
f) $f'(x) = (-3) \cdot \sin(x) + (5 - 3x) \cdot \cos(x)$
g) $f(x) = 2 \cdot x^{-1} \cdot \cos(x)$
$f'(x) = -2x^{-2} \cdot \cos(x) - 2 \cdot x^{-1} \cdot \sin(x)$
$= -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(x) - \frac{2}{x} \cdot \sin(x)$
h) $f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x)$
$= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$
i) $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$
j) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos(x) - x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x)$
$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot \cos(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin(x)$
k) $f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(x) \cdot (2 - x) - \frac{\pi}{4}\sin(x)$
l) $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$

3 a) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$;
$u(x) = x$; $u'(x) = 1$;
$v(x) = \sin(3x)$; $v'(x) = 3\cos(3x)$;
$f'(x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x)$
b) $f(x) = (3x + 4)^2 \cdot \sin(x)$;
$u(x) = (3x + 4)^2$; $u'(x) = 6(3x + 4)$;
$v(x) = \sin(x)$; $v'(x) = \cos(x)$;
$f'(x) = 6(3x + 4) \cdot \sin(x) + (3x + 4)^2 \cdot \cos(x)$
c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x + 3)^2$
$u(x) = x^{-1}$; $u'(x) = -x^{-2}$
$v(x) = (2x + 3)^2$; $v'(x) = 4(2x + 3)$;
$f'(x) = -x^{-2} \cdot (2x + 3)^2 + 4x^{-1}(2x + 3)$
$\quad = x^{-2}(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4 - \frac{9}{x^2}$
d) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot (1 - 4x)$; $u(x) = (5 - 4x)^3$;
$u'(x) = -12(5 - 4x)^2$; $v(x) = 1 - 4x$; $v'(x) = -4$;
$f'(x) = -12(5 - 4x)^2 \cdot (1 - 4x) - 4(5 - 4x)^3$
$\quad = (5 - 4x)^2 \cdot (64x - 32) = 32(5 - 4x)^2 \cdot (2x - 1)$
e) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$; $u(x) = (5 - 4x)^3$;
$u'(x) = -12(5 - 4x)^2$; $v(x) = x^{-2}$; $v'(x) = -2 \cdot x^{-3}$;
$f'(x) = -12(5 - 4x)^2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x^{-3}(5 - 4x)^3$
$\quad = -\frac{2}{x^3}(5 - 4x)^3 - \frac{12}{x^2}(5 - 4x)^2$
$\quad = -2 \cdot x^{-3}(2x + 5)(5 - 4x)^2$
f) $f(x) = 3x \cdot \cos(2x)$; $u(x) = 3x$; $u'(x) = 3$;
$v(x) = \cos(2x)$; $v'(x) = -2\sin(2x)$;
$f'(x) = 3\cos(2x) - 6x\sin(2x)$
g) $f(x) = 3x \cdot (\sin(x))^2$; $u(x) = 3x$; $u'(x) = 3$;
$v(x) = (\sin(x))^2$; $v'(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$;
$f'(x) = 3(\sin(x))^2 + 6x\sin(x) \cdot \cos(x)$
h) $f(x) = (2x - 1)^2 \cdot \sqrt{x}$; $u(x) = (2x - 1)^2$; $u'(x) = 4(2x - 1)$;
$v(x) = \sqrt{x}$; $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x) = 4\sqrt{x}(2x - 1) + \frac{(2x - 1)^2}{2\sqrt{x}}$
i) $f(x) = 0{,}5x^2\sqrt{4 - x}$; $u(x) = 0{,}5x^2$; $u'(x) = x$;
$v(x) = \sqrt{4 - x}$; $v'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x}}$; $f'(x) = x \cdot \sqrt{4 - x} - \frac{x^2}{4\sqrt{4 - x}}$

4 A: Produktregel nicht beachtet (nur jeden Faktor abgeleitet).
Richtig: $f'(x) = 3\sin(x) + (3x + 8)\cos(x)$
B: Falsches Vorzeichen beim Ableiten von $\cos(x)$.
Richtig: $f'(x) = 3\cos(x) - (3x + 8)\sin(x)$
C: Innere Ableitung von $\sin(2x)$ fehlt.
Richtig: $f'(x) = 2\sin(2x) + 2 \cdot (2x + 1)\cos(2x)$

5 a) Nullstellen von f: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$
Gemeinsame Punkte mit der x-Achse: $N_1(1|0)$; $N_2(3|0)$
b) $f'(x) = (x - 3)^2 + (x - 1) \cdot 2 \cdot (x - 3) = (x - 3)(3x - 5)$
$f'(1) = 4$
c) $f'(x) = 0$ hat die Lösungen 3 und $\frac{5}{3}$; waagerechte Tangenten in $N_2(3|0)$ und $P\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{32}{27}\right)$.

7 a) $f(x) = (x + 2)\sin(x)$
b) $f(x) = 2x \cdot \sin(0{,}5x)$

8 a) Mit Produktregel:
$f'(x) = 3(0{,}5x + 1)^2 + 3x(0{,}5x + 1)$
$\quad = 0{,}75x^2 + 3x + 3 + 1{,}5x^2 + 3x$
$\quad = 2{,}25x^2 + 6x + 3.$
Ohne Produktregel: $f(x) = 0{,}75x^3 + 3x^2 + 3x$;
$f'(x) = 2{,}25x^2 + 6x + 3.$
b) Mit Produktregel: $g'(x) = -(3 + x) + (5 - x) = -2x + 2.$
Ohne Produktregel: $g(x) = 15 + 2x - x^2$; $g'(x) = 2 - 2x.$
c) Mit Produktregel: $h'(x) = -\sqrt{x} + \frac{1 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{-3x + 1}{2\sqrt{x}}.$
Ohne Produktregel: $h(x) = \sqrt{x} - x \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$;
$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{-3x + 1}{2\sqrt{x}}.$
d) Mit Produktregel: $i'(x) = \sqrt{1 - x} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}.$
Ohne Produktregel: $i(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$;
$i'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 3x^2}{\sqrt{x^2 - x^3}} = \frac{x(2 - 3x)}{2x\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}.$

Seite 22

9

	A	B	C	D	E	F	G	H
Potenzregel	x	x	x		x		x	x
Faktorregel				x			x	
Summenregel	x							x
Kettenregel		x	x		x	x	x	x
Produktregel			x		x	x		

10 Bedingungen für f:
(1) $f(2) = 0$
(2) $f'(2) = 0$
$g(x) = x \cdot f(x)$; $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$
Daraus folgt:
(1) $g(2) = 2 \cdot f(2) = 0$
(2) $g'(2) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
Also: der Graph von g berührt die x-Achse in $P(2|0)$.

11 a) $f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g(x) + 2x \cdot g'(x) + 2x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$
$\quad = 2 \cdot g(x) + 4x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$
b) $f'(x) = g'(x) + x \cdot g''(x)$; $f''(x) = g''(x) + g''(x) + x \cdot g^{(3)}(x)$
$\quad = 2 \cdot g''(x) + x \cdot g^{(3)}(x)$
c) $f'(x) = g^2(x) + 2x \cdot g(x) \cdot g'(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2x \cdot (g'(x))^2$
$\quad + 2x \cdot g(x) \cdot g''(x)$
$\quad = 4 \cdot g(x) \cdot g'(x) + 2x \cdot (g'(x))^2 + 2x \cdot g(x) \cdot g''(x)$
d) $f'(x) = (g'(x))^2 + g(x) \cdot g''(x)$;
$f''(x) = 2 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g^{(3)}(x)$
$\quad = 3 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g^{(3)}(x)$

14 a) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$;
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(x) = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
b) $f(x) = (x + 1)(x - 1)^{-1}$;
$f'(x) = (x - 1)^{-1} - (x + 1)(x - 1)^{-2} = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = -\frac{2}{(x - 1)^2}$
c) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot v^{-1}(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v^{-1}(x) + u(x) \cdot (-1) \cdot v^{-2}(x) \cdot v'(x)$
$\quad = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
d) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)}{x^2}$
$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $f'(x) = \frac{(x - 1) - (x + 1)}{(x - 1)^2} = -\frac{2}{(x - 1)^2}$

e) $f'(x) = \frac{-2x(3x+1) - (1-x^2) \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{-6x^2 - 2x - 3 + 3x^2}{(3x+1)^2}$

$= \frac{-3x^2 - 2x - 3}{(3x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{-x \cdot \sin(x) - \cos(x)}{x^2} = -\frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x)}{x^2}$

$h'(x) = \frac{\cos^2(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

15 a) $f(x) = x^9 = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$ mit
$u(x) = v(x) = w(x) = x^3$
$f'(x) = 9x^8$
$u'(x) = v'(x) = w'(x) = 3x^2$
$u'(x) \cdot v'(x) \cdot w'(x) = 27x^6 \neq f'(x)$
b) $g'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$
$f(x) = [x \cdot \sin(x)] \cdot \cos(x)$
$f'(x) = [x \cdot \sin(x)]' \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x))$
$= (\sin(x) + x \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) - x \cdot \sin^2(x)$
$= \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \cos^2(x) - x \cdot \sin^2(x)$
c) $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3$
$f' = (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$
$= \left(f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'\right) \cdot f_3 + (f_1 \cdot f_2) \cdot f_3'$
$= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3'$
Vermutung: Für $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n$ gilt
$f' = f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \cdot \ldots \cdot f_n$
$+ \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n'$

6 Monotonie und Krümmung

Seite 23

Einstiegsaufgabe
Die Anzahl der Kunden wächst auch nach Ende Juni weiter, aber ab diesem Zeitpunkt verlangsamt sich das Wachstum.

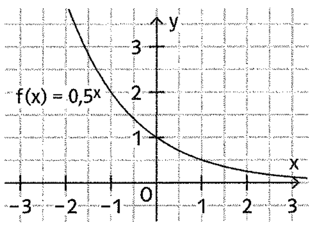
Seite 24

1 a) streng monoton fallend
b) monoton wachsend
c) keine Monotonie
d) streng monoton wachsend

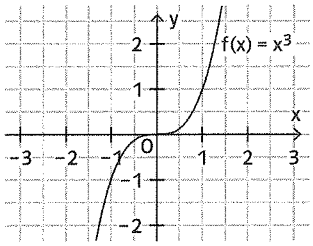
2 a) Die Funktion f ist monoton wachsend im Intervall $I = (0; 1{,}3)$.
Die Funktion g ist monoton wachsend im Intervall $I = (1{,}6; 2{,}5)$.
b) Der Graph von f ist linksgekrümmt für $-1 < x < 0{,}8$.
Der Graph von g ist linksgekrümmt für $-1 < x < 0$ und für $1 < x < 2{,}5$.

3 a) $f'(x) = 0{,}4x > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 0{,}4 > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.
b) $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ für $x > 1$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 6x > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.
c) $f'(x) = 4x^3 - 4x > 0$ für $x > 1$, also ist f streng monoton wachsend.
$f''(x) = 12x^2 - 4 > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f linksgekrümmt.

4 a)



b)



Seite 25

7 a) $f'(x) = x^3 + 6x$; $f''(x) = 3x^2 + 6$;
$f''(x) > 0$ für alle x; der Graph von f ist eine Linkskurve für alle x.
b) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $f''(x) = 6x - 6$;
$f''(x) > 0$ für $x > 1$, also ist der Graph von f für $x > 1$ eine Linkskurve; für $x < 1$ ist der Graph eine Rechtskurve.
c) $f'(x) = 2\cos(x)$; $f''(x) = -2\sin(x)$;
$f''(x) < 0$ für $0 < x < \pi$; der Graph von f ist eine Rechtskurve.

8 a) Falsch. Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$; daher ist f' streng monoton fallend.
b) Falsch. Zum Beispiel hat f' mit $f'(x) = 0{,}5x^2 - 1$ den vorgegebenen Graphen als Graph der 2. Ableitung, aber $f'(x) < 0$ für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
c) Richtig. Für $x > 0$ gilt $f''(x) > 0$, der Graph von f ist eine Linkskurve.
d) Richtig. Um Aussagen über das Krümmungsverhalten von f' zu machen, betrachtet man die zweite Ableitung von f', also f'''. Es gilt $f'''(x) > 0$ für alle x, also ist f' eine Linkskurve für alle x.

10 a) Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$. f' ist für alle x streng monoton wachsend, f ist für $x < 0$ aber streng monoton fallend.
b) Gegenbeispiel: $f(x) = -x^4$. Für $x = 0$ gilt: $f''(0) = 0$.
c) Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$.
Es gilt: $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$.

11 Für $x > 0$ gilt $f(x) > 0$; $f'(x) > 0$; $f''(x) \geq 0$.
a) $g(x) = x + f(x)$; $g'(x) = 1 + f'(x)$; $g''(x) = f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
b) $g(x) = x \cdot f(x)$; $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x)$;
g besitzt also die drei Eigenschaften.
c) $g(x) = f^2(x)$; $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$;
$g''(x) = 2 \cdot ((f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x))$;
g besitzt die drei Eigenschaften.