Checkliste Wachstum - Wachstumsfunktionen

Nr.	Ich kann ….		--	-	0	+	++	L
K_1	Daten in einer Tabelle untersuchen, grafisch darstellen und absolute und prozentuale Zunahmen berechnen.	Aufgabe 1 und 2						
K_2	zwischen linearem und exponentiellen Wachstum unterscheiden							
K_3	zu einer Wachstumsrate (Prozentsatz) den Wachstumsfaktor bestimmen und umgekehrt	Aufgabe 3, 4 und 5						
K_4	aus zwei Daten einer exponentiellen Zu- oder Abnahme den Wachstums-faktor bestimmen und eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = c \cdot a^x$ aufstellen.	Aufgabe 6, 7, 8 und 9						
K_5	mithilfe der Funktionsgleichung verschiedene Funktionswerte berechnen.	Aufgabe 10, 11, 12, 13, 14 und 15						
K_6	verschiedene Größen (c und a) in einer Exponentialfunktion verändern und deren Wirkung auf den Verlauf der Funktion beschreiben.	Aufgabe 16						
K_7	Exponentialgleichungen lösen	Aufgabe 17, 18 und 19						
K_8	zu einer Sachsituation eine geeignete Funktionsgleichung aufstellen und die oben beschriebenen Verfahren zur Lösung der Sachsituation nutzen.	Aufgabe 20 - 26						
K_9	Exponentialfunktionen mithilfe des GTR darstellen, mit Tabellen und der Trace-Funktion vorgegebene Werte bestimmen.	Teilaufgaben der Aufgaben 20 – 26						
K_{10}	mithilfe des GTR das Erreichen vorgegebener Werte bzw. Verdoppelungszeiten bestimmen	Teilaufgaben der Aufgaben 20 – 26						

Liebe Schülerin, lieber Schüler,
arbeite zunächst das „Grundwissen“ zum Thema Wachstumsfunktionen durch. Danach bearbeite den Test „Vorwissen“ und werte ihn anhand der Lösungshinweise aus. Danach sollst du deine Kompetenzen mithilfe dieser Checkliste einschätzen.
Nun musst du die Inhalte üben, die du nicht sicher beherrscht. Zum Schluss wird mit dem Abschlusstest dein Wissen getestet. Die Wiederholungseinheit ist abgeschlossen.

Grundwissen Wachstumsfunktionen

Wertetabelle - Funktionsgleichung - Graph

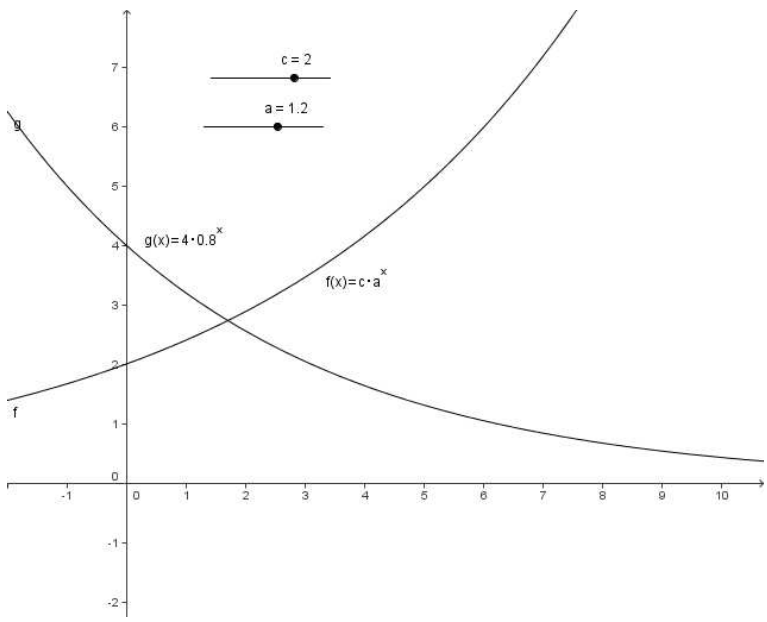
Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall kann anhand von Wertetabellen erkannt werden: Die absolute Zunahme verändert sich, die prozentuale Zunahme bleibt gleich. Durch den Quotienten zweier aufeinander folgender Werte kann der Wachstumsfaktor berechnet werden.

x	f(x)	abs. Zunahme	Wachstumsfaktor
0	5,0000		
1	6,0000	1	$\frac{6}{5} = 1,2$
2	7,2000	1,2	$\frac{7,2}{6} = 1,2$
3	8,6400	1,4400	$\frac{8,64}{7,2} = 1,2$
4	10,3680	1,7280	
5	12,4416	2,0736	
6	14,9299	2,4883	
7	17,9159	2,9860	

Wachstumsrate beschreibt die prozentuale Zunahme, zum Beispiel die Zunahme des Kapitals durch Zinsen. Bei einem Zinssatz von 4 % beträgt die Wachstumsrate 4 % und der Wachstumsfaktor 1,04. Der Wachstumsfaktor ist der Faktor mit dem in der Tabelle ein nachfolgender Tabellenwert berechnet werden kann.

Funktionsgleichung:

Mithilfe der Funktionsgleichung lässt sich zu einem beliebigen x-Wert ein f(x)-Wert berechnen. Die Funktionsgleichung für Wachstums- und Zerfallsfunktionen haben die allgemeine Form $f(x) = c \cdot a^x$. Die Variable c nennt sich Startwert (Anfangswert), die Variable a ist der Wachstumsfaktor. Ist der Wachstumsfaktor a > 1, so handelt es sich um eine Wachstumsfunktion. Ist a < 1, so wird ein Zerfallsprozess dargestellt.



Funktionsgleichung ermitteln:

Eine Wachstumsfunktion ist durch die Koordinaten zweier Punkte eindeutig bestimmt.

Beispiel: Ein Kapital von 2500 € wird so verzinst, dass nach 5 Jahren das Kapital durch die Zinsen auf 3041,63 € angewachsen ist. Ermittle den Wachstumsfaktor und den Zinssatz. Stelle die Funktionsgleichung auf.

Startwert c: 2500 € $P_1(0|2500)$

Endkapital: 3041,63 € $P_2(5|3041{,}63)$

Da der Startwert bekannt ist, hat die Funktion die Form $f(x) = 2500 \cdot a^x$.

Die Koordinaten des zweiten Punktes werden in die Funktionsgleichung eingesetzt und der Wachstumsfaktor a berechnet:

$P_2(5|3041{,}63)$

$3041{,}63 = 2500 \cdot a^5 \quad |:2500$

$\frac{3041{,}63}{2500} = a^5 \quad |\sqrt[5]{\ }$

$\sqrt[5]{1{,}216652} = a$

$a = 1{,}0399999$

$a \approx 1{,}04$

Der Wachstumsfaktor a ist 1,04, der Zinssatz beträgt 4 %.

Verdoppelungszeiten, Halbwertzeiten:

Eine charakteristische Eigenschaft von Exponentialfunktionen ist, dass die Zeitspannen, in denen sich ein Funktionswert verdoppelt, bzw. halbiert für jede Funktion eine konstante Größe ist. Diese Verdoppelungszeiten / Halbwertszeiten können grafisch ermittelt oder berechnet werden.

Exponentialgleichungen lösen:

Soll zu einem gegebenen f(x)-Wert der x -Wert ermittelt werden, so muss eine Exponentialgleichung nach x aufgelöst werden. Dazu werden zwei Gesetzmäßigkeiten angewandt:

Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl, mit der a potenziert werden muss um b zu erhalten. Die Gleichungen $b = a^x$ und $x = \log_a b$ sind gleichwertig.

Der Logarithmus von b zu einer beliebigen Basis a kann mithilfe des Zehnerlogarithmus berechnet werden: $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$

Beispiel: Eine Kapitalentwicklung wir durch die Funktionsgleichung $f(x) = 5000 \cdot 1{,}045^x$ beschrieben. Wann hat sich das Kapital durch die Zinsen verdoppelt?

$10000 = 5000 \cdot 1{,}045^x \quad |:5000$

$2 = 1{,}045^x$

$x = \log_{1{,}045} 2$

$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}045}$

$x = 15{,}747$

Die meisten Taschenrechner können Zehnerlogarithmen berechnen. Entgegen der oben verwendeten Notation bedeutet log(4) auf dem Taschenrechner $\log_{10}(4)$.

Lösungsverfahren mit dem GTR:

Das Ermitteln von Verdoppelungszeiten / Halbwertzeiten und das Erreichen vorgegebener Werte (Wann ist eine Bevölkerung auf einen bestimmten Wert angewachsen?) kann mit dem GTR (grafikfähigen Taschenrechner) mit vielfältigen Methoden durchgeführt werden. Die Voraussetzung ist immer, dass die Funktionsgleichung richtig aufgestellt und in den y-Editor eingegeben wurde. Dann können Werte mit der Tabellen- und Tracefunktion ermittelt werden, vorgegebene Werte können als Funktion eingegeben (y=10000) und der Schnittpunkt beider Funktionen ermittelt werden. Die beschriebenen Verfahren sind gleichwertig.

Übungen zur Kompetenz K_1 und K_2

Aufgabe 1:

a) Berechne jeweils die absolute und die prozentuale Zunahme der beiden Zuordnungen.
b) Entscheide und begründe, ob es sich um ein lineares oder um ein exponentielles Wachstum handelt.
c) Stelle die Zuordnungen in einem Koordinatensystem (Koordinatensystem 1) grafisch dar. Verwende die Punkte, die sich in das abgebildete Koordinatenkreuz übertragen lassen.

x	f(x)	abs. Zunahme	porzentuale Zunahme
0	500		
1	545		
2	590		
3	635		
4	680		
5	725		
6	770		
7	815		

x	g(x)	abs. Zunahme	porzentuale Zunahme
0	750		
1	1125		
2	1687,5		
3	2531,25		
4	3796,875		
5	5695,3125		
6	8542,96875		
7	12814,4531		

x	k(x)	abs. Zunahme	porzentuale Zunahme
0	780		
1	663		
2	563,55		
3	479,018		
4	407,165		
5	346,09		
6	294,177		
7	250,05		

x	i(x)	abs. Zunahme	porzentuale Zunahme
0	1500		
1	1380		
2	1260		
3	1140		
4	1020		
5	900		
6	780		
7	660		

Aufgabe 2:

Ein Kapital von 75 000 € wird mit einem Zinssatz von 4,75 Prozent verzinst. Das Kapital ist 7 Jahre lang fest angelegt.

a) Berechne die Werte der Tabelle.
b) Beschreibe, wie man möglichst einfach das Kapital für das kommende Jahr berechnen kann.

Jahr	0	1	2	3	4	5	6	7
Kapital	75.000,00 €	78.562,50 €						
Zinsen	3.562,50 €							

Übungen zur Kompetenz K_3

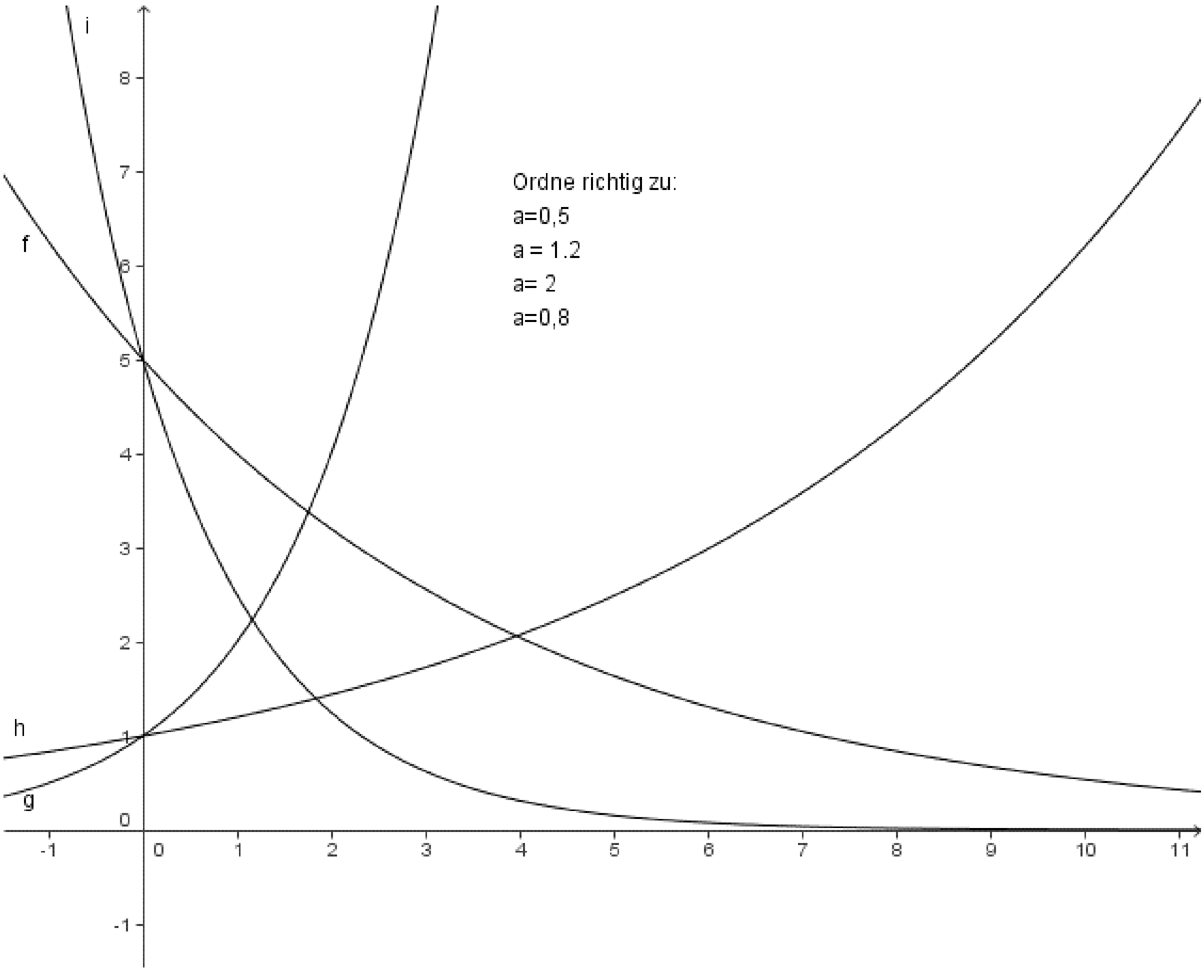
Aufgabe 3:
Bestimme den Wachstumsfaktor bzw. die Wachstumsrate.

a) p% =5,6 %
b) a = 1,23
c) p % = - 5%
d) a = 0,98
e) Ein Kapital wird mit 5,5 % verzinst.
f) Ein Pflanze wächst in einer Zeiteinheit um das 1,3 fache.
g) Eine Substanz zerfällt in einem Monat auf das 0,95 fache.
h) Auf Grund der Inflation wird das Geld pro Jahr um 4 Prozent abgewertet.

Aufgabe 4:
Fülle die Tabelle aus.

Aufgabe	Wachstumsrate	Wachstumsfaktor	Funktionsgleichung
a)	12,5 %		
b)		1,06	
c)		0,89	
d)	-3,8 %		
e)			$f(x)=0{,}88^x$
f)			$f(x)=1{,}2\cdot 1{,}5^x$
			$f(x)=2{,}5\cdot 0{,}68^x$

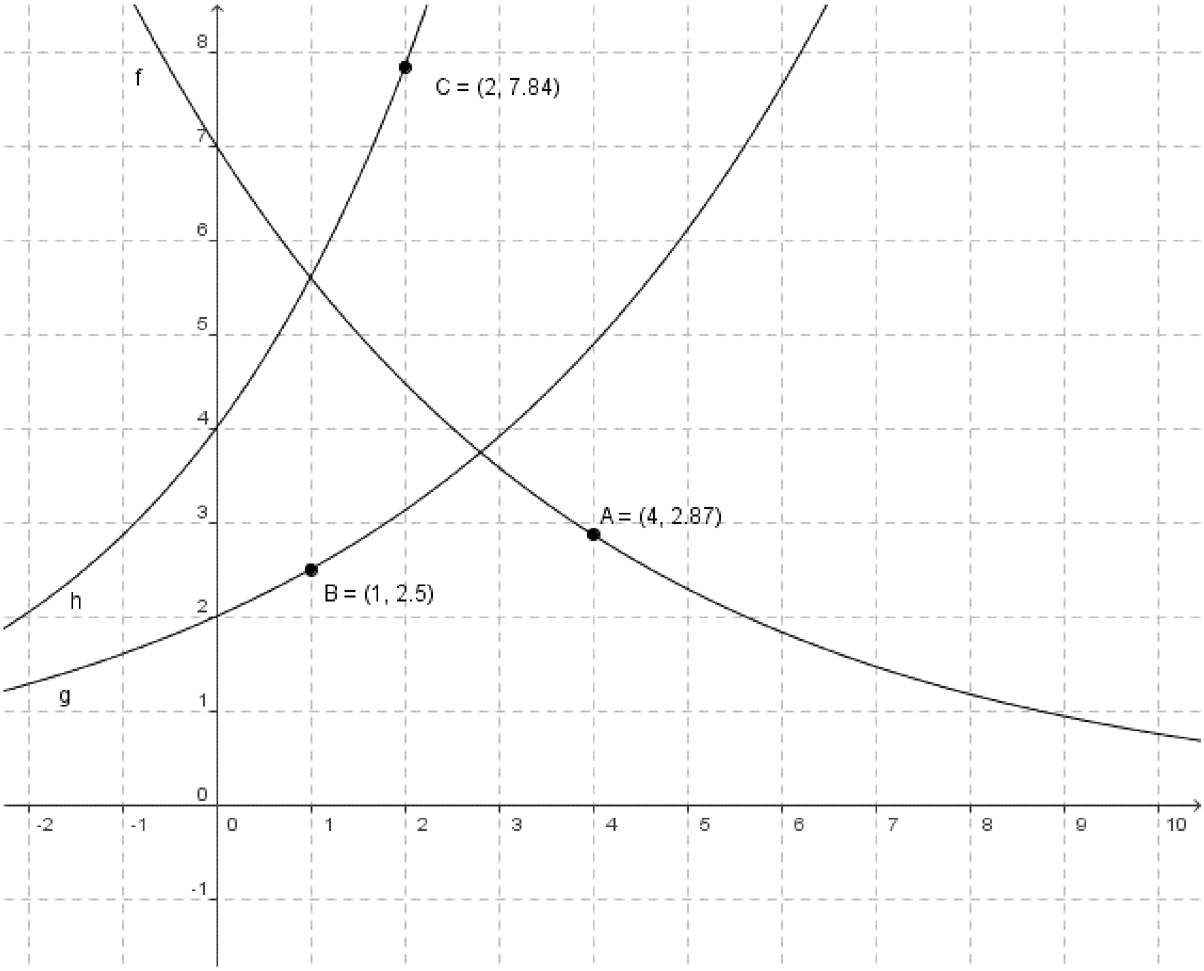
Aufgabe 5:
Ordne den dargestellten Funktionsgraphen die Wachstumsfaktoren richtig zu.



Übungen zur Kompetenz K_4

Aufgabe 6:
Ein Kapital von 3500 € ist nach drei Jahren auf ein Endkapital von 4168,55 € angewachsen. Berechne den Zinssatz, mit dem das Kapital verzinst wurde. Dokumentiere deinen Rechenweg.

Aufgabe 7:
In dem Koordinatenkreuz sind die Funktionen f(x), g(x) und h(x) abgebildet. Bestimme die Funktionsgleichungen. Verwende den Startwert und den weitern auf dem Graphen gegebenen Punkt.



Aufgabe 8:
Bestimme die Funktionsvorschrift der Exponentialfunktionen, die jeweils durch zwei Punkte gegeben sind.

	f(x)	g(x)	h(x)	j(x)	k(x)	l(x)
Punkt A	$P_A(0\|1)$	$P_A(0\|5)$	$P_A(0\|630)$	$P_A(0\|7{,}5)$	$P_A(0\|12)$	$P_A(0\|35{,}7)$
Punkt B	$P_B(1\|2)$	$P_B(1\|7{,}5)$	$P_B(5\|1567{,}641)$	$P_B(7\|1{,}57286)$	$P_B(4\|7{,}5)$	$P_B(5\|57{,}4952)$

Aufgabe 9:
Eine Bank A verzinst ein Kapital von 500 € in den ersten beiden Jahren mit 2,5 Prozent und in dem dritten bis fünften Jahr mit 3,5 Prozent. Die Bank B zahlt am Schluss den gleichen Endbetrag aus. Mit welchem Zinssatz wurde das Kapital von Bank B verzinst?

Übungen zur Kompetenz K_5

Aufgabe 10
Eine Bakterienkultur wächst in einer Versuchsreihe exponentiell in 1 Stunde von 1100 Keimen auf 1250 Keime.

a) Stelle eine Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion auf (Zeiteinheit: 1 Stunde)!
b) Vervollständige die Tabelle.

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Bakterien	1100	1250							

c) Aus wie vielen Keimen bestand die Bakterienkultur zwei Stunden bevor die Versuchsreihe startete?
d) Ermittle durch Probieren oder durch Rechnung nach welcher Zeitspanne sich die Zahl der Keime verdoppelt hat.

Aufgabe 11:
Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = 34{,}5 \cdot 1{,}0342^x$. Berechne für diese Funktionsgleichung die folgenden Werte:

x-Wert	-12	-2,7	0	1	2	2,8	13	34,9
y-Wert								

Aufgabe 12:
Die UNO geht ermittelt das Wachstum der Erdbevölkerung ab dem Jahr 2009 mit der Funktionsgleichung $f(x) = 6{,}75 \cdot 1{,}011555^x$. Die Angaben werden in Mrd. Einwohner berechnet.

a) Um wie viele Menschen wird die Erdbevölkerung im Jahr 2009 wachsen?
b) Wie viele Menschen werden im Jahr 2020 und 2030 voraussichtlich auf der Erde leben?
c) Ermittle durch Probieren und durch Berechnung, wann 8 Mrd. Menschen auf der erde leben werden.

Aufgabe 13:
Der Erfinder des Schachspiels soll als Preis folgenden Lohn gefordert haben: Auf das erste Feld des Schachbretts wird ein Reiskorn gelegt, auf das zweite Feld zwei Reiskörner. Nun wird die Zahl der Reiskörner immer verdoppelt.
Ist dies eine bescheidene Forderung für die Erfindung? Begründe deine Antwort mithilfe von Berechnungen.
Wie viele Reiskörner liegen auf dem letzten Feld?

Aufgabe 14:
1626 wurden den Ureinwohner von Amerika Manhattan für 26 Dollar abgekauft. Wenn diese 26 Dollar im Jahr 1626 mit einem Zinssatz von 5 Prozent angelegt worden wären, auf welchen Geldbetrag wären die 26 Dollar bis heute circa angewachsen?

Aufgabe 15:
Die Lichtintensität nimmt unter Wasser um 11 Prozent pro Meter ab. Dadurch werden auch Farben nur schwerer wahrnehmbar.

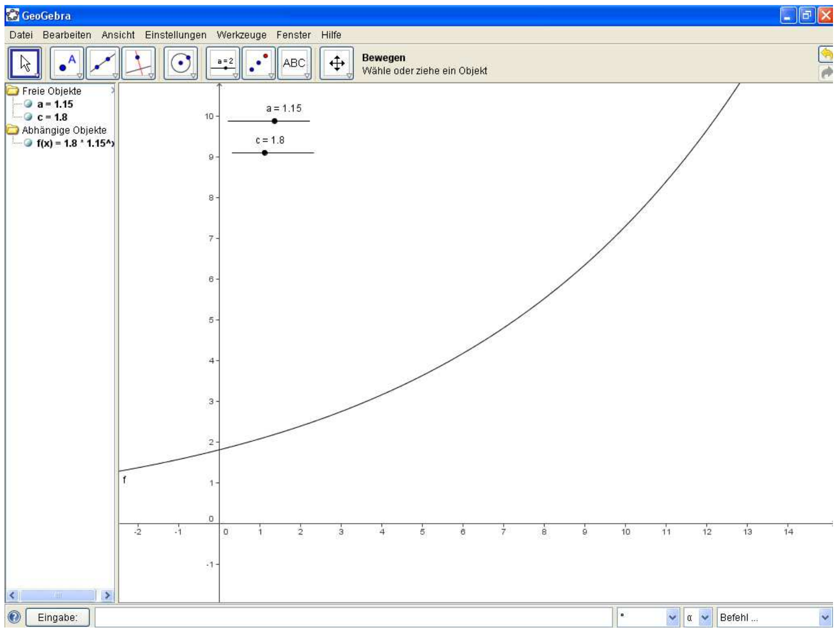
a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Abnahme der Lichtintensität unter Wasser in Abhängigkeit von der wassertiefe beschreibt.

b) Um wie viel Prozent des Ausgangswertes ist die Lichtintensität in einer Tiefe von 10 Metern abgesunken?

Übungen zur Kompetenz K_6

Aufgabe 16:

Geogebra ist eine dynamische Software, mit der sich Funktionen darstellen und dynamisch verändern lassen. Du findest Geogebra auf der Internetseite www.geogebra.org . Du kannst das Programm von dieser Internetseite aus direkt starten (Webstart).



Mit dem Programm musst du nun eine Experimentierumgebung für Exponentialfunktionen aufbauen (siehe Bild rechts). Gehe dazu in folgenden Schritten vor:

a) Erstelle zwei Schieberegler mit den Variablennamen a und c.
b) Gib die Funktionsvorschrift „f(x)=c*a^x“ in der Eingabezeile unten ein.
c) Aktiviere das Werkzeug „Bewegen“ und verändere die Parameter für c und a.
d) Beantworte schriftlich die folgenden Arbeitsaufträge.

- Welche Veränderungen des Funktionsgraphen sind zu beobachten, wenn man den Wert c variiert?
- Welchen Einfluss hat die Variable a auf den Verlauf des Funktionsgraphen?
- In welchem Zahlbereich von a kann man von einer Wachstumsfunktion im eigentlichen Sinn sprechen?
- In welchem Zahlbereich von a kann man von einer Zerfallsfunktion sprechen?

Übungen zur Kompetenz K_7

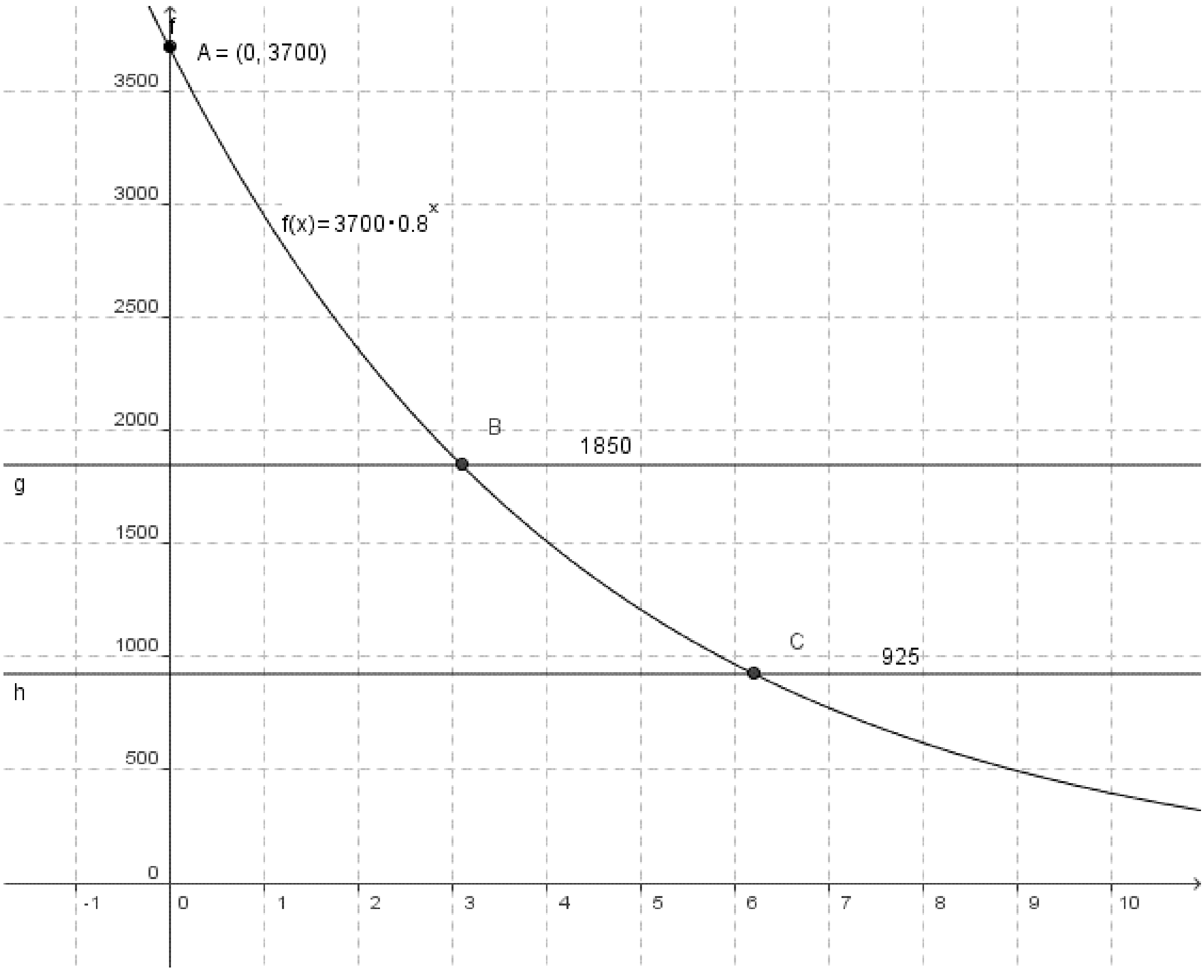
Aufgabe 17:
Löse folgende Gleichungen algebraisch:

a) $2^x = 256$
b) $5^x = 78125$
c) $1{,}5^x = 130$
d) $1000 = 250 \cdot 1{,}05^x$
e) $720 = 500 \cdot 0{,}98^x$
f) $200 = 500 \cdot 1{,}06^x$
g) $5{,}68 = 1{,}25 \cdot 1{,}022^x$

Aufgabe 18:
Bestimme von den Funktionen die Verdoppelungs- bzw. die Halbwertszeit algebraisch.

Funktionsgleichung	Exponentialgleichung	Lösung
$f(x) = 750 \cdot 1{,}015^x$	$1500 = 750 \cdot 1{,}015^x$	$x =$
$g(x) = 1800 \cdot 0{,}89^x$		
$h(x) = 65000 \cdot 1{,}21^x$		
$k(x) = 3{,}8 \cdot 0.998^x$		

Aufgabe 19:



Bestimme rechnerisch die Koordinaten der Punkte B und C.

Übungen zur Kompetenz K_8

Aufgabe 20:
Indien ist ein Land mit relativ starkem Bevölkerungswachstum. Die Tabelle unten zeigt die Entwicklung der Bevölkerung von 1925 bis 2007.

- Stelle diese Zahlen in einem Diagramm grafisch dar und entscheide auf Grund der Grafik, ob man von einem exponentiellen Wachstum ausgehen kann.

Jahr	x	Bevölkerung	Absolute Zunahme	Jährliche Wachstumsrate	Jährlicher Wachstumsfaktor
1925	0	263.071.000			
1950		350.445.000			
1975		600.763.000			
2000		1.014.003.800			
2007		1.129.866.000			

- Erstelle eine Prognose aufgrund der jährlichen Wachstumsrate, die zwischen 2000 und 2007 galt. Stelle für diese berechnete Wachstumsrate die Funktionsgleichung auf. Im Jahre 2000 soll der Ursprung liegen. Die Einheit auf der y -Achse seien Milliarden Einwohner.

- Welcher Einwohnerzahl ergibt sich nach dieser Prognose im Jahr 2025?

- Wann wird die Einwohnerzahl von 2 Milliarden in Indien überschritten?

- Wie lang ist der Verdoppelungszeitraum?

Aufgabe 21:

Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung einer Aktie für Energie-Technik. Die Aktie wurde mit einem Ausgabewert von 2,75 € auf den Markt gegeben. Der Wertzuwachs war in den folgenden Jahren deutlich.

Jahr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Aktienwert in €	2,75	3	3,2	4	4,5	6	8	8,2	12	13	18	20

a) Zeichne die Aktienwerte in das gegebene Koordinatensystem ein.
b) Eine Prognose geht von einem exponentiellen Wachstum aus. Der Anfangswert sei der Ausgabewert der Aktie von 2,75 €. Der Wert nach 10 Jahren (18 €) soll die Wachstumsfunktion definieren. Ermittle durch Rechnung die Funktionsgleichung.
c) Eine zweite Prognose geht von einem linearen Wachstum aus. Diese Prognose-Gerade wird durch den Anfangswert (0; 2,75) und den Wert im 6. Jahr (8 €) bestimmt. Zeichne diese lineare Prognose-Gerade in das Koordinatenkreuz ein.
d) Ermittle die Funktionsgleichung für diese Gerade.
e) Zu welchem Zeitpunkt ergeben beide Prognosen den gleichen Wert. Beschreibe, wie du diesen Zeitpunkt möglichst exakt mit dem GTR bestimmen kannst.
f) Ermittle den Zeitpunkt, zu dem der Prognosewert der Wachstumsfunktion doppelt so groß wird, wie der Prognosewert der linearen Funktion.

Aufgabe 22:
Hausrotschwänze werden etwa 14 cm groß und 15 Gramm schwer. Männchen wie Weibchen sind gut zu erkennen an ihrem ständig vibrierenden rostroten Schwanz. Die Vögel nisten in Höhlen von Mauern, Felsen und Gebäuden. Bis zu dreimal im Jahr ziehen sie 5 bis 7 Junge auf. Hausrotschwänze ernähren sich von Insekten, die sie geschickt auch im Flug erbeuten. Als Zugvögel überwintern sie in den Mittelmeer- und westeuropäischen Gebieten.

In einem Naturschutzgebiet werden im Juli 1987 40 Exemplare dieser Vogelart gezählt. Es herrschen zwei Jahre lang optimale Bedingungen für den Hausrotschwanz.

a) Auf wie viel Exemplare kann die Population nach einem Jahr angewachsen sein? Erstelle zunächst eine Tabelle und wähle als Zeiteinheit „Monate“.

b) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die das Anwachsen der Population beschreibt.

c) Wann ist mit einer Population von 10 000 Vögeln zu rechnen? Ermittle das Ergebnis mithilfe des GTRs und beschreibe, wie du vorgegangen bist.

Aufgabe 23:
Eine Bierschaumkrone zerfällt exponentiell. In der durchgeführten Messung wird die Höhe der Bierschaumkrone in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Es wurden folgende Werte ermittelt:

Höhe (cm)	22	19	13	10
Zeit (Min)	0	1	4	6

a) Zeige, dass der Zerfall der gemessenen Bierschaumkrone mit der Funktionsgleichung
$y_1 = 22 \cdot 0{,}8768^x$ angenähert werden kann.
Zeige, wie diese Funktionsgleichung aus den Daten der Tabelle ermittelt werden kann.

b) Erstelle eine Tabelle für die Zeiten von 0 bis 20 Minuten und zeichne den Graphen der Zerfallskurve in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Ermittle die Halbwertszeit dieser Zerfallskurve.

d) Wann ist die Höhe der Bierschaumkrone kleiner als 1 cm hoch?

e) Nach einer Vorschrift der Brauergemeinschaft Franken darf der Zerfall einer Bierschaumkrone keine Halbwertzeit haben, die kleiner als 2 Minuten ist. Stelle eine Funktionsgleichung für diese Normkurve auf. Die Ausgangsgröße sei 22 cm.

Aufgabe 24:
Eine Bakterienkultur wächst exponentiell in 1 Stunde von 1100 Keimen auf 1250 Keime.

a) Stelle eine Funktionsgleichung der Wachstumsfunktion auf (Zeiteinheit: 1 Stunde)!
b) Vervollständige die Tabelle.

Stunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Bakterien	1100	1250							

c) Zeichne die Bakterienvermehrung in das bereit gestellte Koordinatensystem.
d) Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Keime verdoppelt? (Verdoppelungszeit) Bestimme diese Zeitspanne möglichst exakt. Dokumentiere dein Vorgehen.
e) Nach welcher Zeit hat die Kultur 11000 Keime?

Aufgabe 25:
Die Preissteigerung in den Lebenshaltungskosten von 1965 bis 1972 in der Bundesrepublik Deutschland wird durch folgende Tabelle dargestellt (1965 Preisindex 100):

Jahr	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
Index	100	103,5	105	106,5	109,5	113,5	119,5	126,5
Wachstumsrate								
Wachstumsfaktor								

a) Berechne die jährlichen Wachstumsraten (siehe Tabelle).
b) Ermittle die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate.
c) Stelle mit den Werten von 1965 und 1972 eine exponentielle Wachstumsfunktion auf und vergleiche die Funktionswerte mit den Werten der Tabelle.
d) Stelle den Funktionsgraphen in einem Koordinatensystem dar.

Aufgabe 26:
Auf einem Teich wachsen zwei Algensorten. Sorte A bedeckt zu Beginn des Beobachtungszeitraums 3 m^2, Sorte B 7 m^2. Bei Sorte A verdoppelt sich die bedeckte Fläche in 3 Tagen, bei Sorte B in 5 Tagen.

a) Gib die Funktionsgleichungen für das Wachstum beider Algensorten an. Zeichne die Graphen für beide Funktionen für einen Beobachtungszeitraum von mindestens 2 Wochen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwende das Koordinatenkreuz unten.
b) Bestimme anhand der Zeichnung, nach wie vielen Tagen die von beiden Sorten bedeckte Fläche gleich groß ist.
c) Bei ungehindertem Wachstum wäre der Teich nach 23 Tagen vollständig mit den beiden Algen bedeckt. Bestimme die Größe des Teichs.