Mathematik - Oberstufe

Aufgaben und Musterlösungen zu Ableitungen, Tangenten, Normalen

Zielgruppe: Oberstufe Gymnasium

Schwerpunkt: Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitung, Tangente, Normale

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Letzte Aktualisierung: November 2009

Datei: Übungsaufgaben zu Ableitungen, Tangenten, Normalen

Übungsaufgaben zu Ableitungen Tangenten, Normalen

Definition Ableitung: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **(x-Methode)**

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **(h-Methode)**

Ableitungsregel: $f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

Punkt-Steigungs-Form: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

Normalensteigung: $m_{Tangente} \cdot m_{Normale} = -1$

Aufgabe 1:
Bestimme mit Hilfe der x-Methode und der h-Methode die Tangentensteigung an der Stelle x = 3 von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3x^3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Aufgabe 2:
Die Funktion $s(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t - 6$ beschreibe für ein Fahrzeug den zurückgelegten Weg in Meter an nach t Minuten.

a) Welchen Weg hat das Fahrzeug nach 4 Minuten zurückgelegt ?
b) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit besitzt das Fahrzeug in den Zeitintervallen $0 \le t \le 4$ bzw. $5 \le t \le 12$?
c) Berechne die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs nach 8 Minuten mit Hilfe des Differenzialquotienten und prüfe dein Ergebnis durch direktes Ableiten.

Aufgabe 3:
Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normale an das Schaubild von $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ im an der Stelle x = 1.

Aufgabe 4:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + x - 2$.

a) Berechne die Ableitungsfunktion von f mit Hilfe des Differenzialquotienten mit der h-Methode an der Stelle $x = x_0$
b) Welcher Punkt auf dem Schaubild von f besitzt eine Tangente mit der Steigung 7 ?
c) Bestimme die Gleichung der Tangente aus a).

Aufgabe 5:
Leite einmal ab:

a) $f(x)=3x^4+\sqrt[3]{x}-6$ b) $f(t)=\frac{6}{5t^3}+2t-7$ c) $g(s)=(2s-5)^2$

d) $f(x)=6x^3-5x+t^2$ e) $g(r)=4s^2+5z+r$ f) $f(x)=\frac{3x^3-2x+1}{x^5}$

Aufgabe 6:
Bestimme die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x)=\frac{5}{28}x^8-\frac{1}{12}x^4+0{,}5x^2+15$ b) $g(x)=\frac{1}{4}x^{-4}-\frac{1}{30x^6}$

c) $h(x)=\frac{3}{5}x^{15}-\sqrt{3}\cdot x+7\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3x^2}+2\sqrt{3}$

d) $f(a)=\sqrt{a}\cdot b$ e) $f(b)=\sqrt{b}\cdot a$ f) $f(a)=\sqrt{b}\cdot a$

g) $f(q)=p^2-3s+5q^2-12\sqrt{r}+x^3$ h) $f(x)=2ax^2-\frac{b}{x}$

i) $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

Aufgabe 7:
August 1999: In der Stowe-Kurve in Silverstone versagen Michael Schumacher die Bremsen und die Lenkung an der Stelle x = -3 an dem durch die Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+3$ gegebenen Streckenverlauf.

a) Bestimme die Gleichung der Funktion, die den weiteren Fahrtverlauf nach dem Versagen der Bremsen und der Lenkung beschreibt.
b) Im Punkt A(3/12) trifft der Ferrari auf die aufgestapelten Autoreifen, die den Aufprall auf die Mauer dämpfen sollen. Beim Aufprall fliegt das linke Vorderrad im rechten Winkel zur Aufprallrichtung davon. Bestimme die Gleichung der Funktion, die die Flugbahn des Reifens beschreibt.

Aufgabe 8:
Gegeben sind die Funktionen $f(x)=x^2$ und $g(x)=\sqrt{x}$. Die senkrechte Gerade g mit der Gleichung x = a schneidet das Schaubild von f im Punkt P und das Schaubild von h im Punkt Q. Bestimme a so, dass die Tangenten in P und Q parallel sind.

Aufgabe 9:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=-0{,}5x^3-3x^2-5x$.
Bestimme die Schnittpunkte der Tangente und der Normalen im Punkt P(-2/f(-2)) mit der x-Achse.

Aufgabe 10:
Gegeben ist die Funktion $f(x)=(x-1)\cdot(x-3)^2$.
Bestimme die Tangentensteigungen in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 11:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$. Die Tangente an das Schaubild von f im Punkt P(-1/f(-1)) schneidet das Schaubild von f in einem weiteren Punkt Q.
Bestimme die Koordinaten von Q exakt.

Aufgabe 12:
Zeige, dass sich die Schaubilder von $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und $g_a(x) = ax^2 - \frac{x}{2} + 1$ im Punkt S(0/1) für jeden Wert von a rechtwinklig schneiden.

Musterlösungen zu Ableitungen, Tangenten, Normalen

Aufgabe 1:

a) x-Methode:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^3+x-1-56}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^3+x-57}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x^2+6x+19)(x-3)}{x-3}$$

$=\lim\limits_{x\to 3}2x^2+6x+19=55$ (die Faktorzerlegung im Zähler erfolgt mit Polynomdivision)

h-Methode:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)^3+(3+h)-1-56}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(27+27h+9h^2+h^3)+3+h-57}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{55h+18h^2+2h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(55+18h+2h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(55+18h+2h^2)=55$$

b) x-Methode:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{3x^3}-\frac{2}{81}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2\cdot 27-2x^3}{81x^3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{54-2x^3}{81x^3}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(-2x^2-6x-18)}{81x^3(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2x^2-6x-18}{81x^3}=\frac{-54}{2187}=-\frac{2}{81}$$

h-Methode:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{3(3+h)^3}-\frac{2}{81}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{3(27+27h+9h^2+h^3)}-\frac{2}{81}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2\cdot 27-2(27+27h+9h^2+h^3)}{81(27+27h+9h^2+h^3)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-54h-18h^2-2h^3}{81(27+27h+9h^2+h^3)}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-54-18h-2h^2}{81(27+27h+9h^2+h^3)}$$

$$=\frac{-54}{2187}=-\frac{2}{81}$$

c) x-Methode:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x+3)-9}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Bei Wurzelfunktionen muss mit Hilfe der 3. binomischen Formel der Bruch erweitert werden.

h-Methode:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(3+h)+3}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{9+2h}-3)(\sqrt{9+2h}+3)}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{9+2h}+3}=\frac{1}{3}$$

Bei Wurzelfunktionen muss mit Hilfe der 3. binomischen Formel der Bruch erweitert werden.

Aufgabe 2:

a) Es gilt $s(4)=\frac{1}{4}\cdot 16+8=12$

Nach 4 Sekunden hat das Fahrzeug 12 m zurückgelegt.

b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht der Steigung der Sekante:

Zeitintervall $0\le t\le 4$: $\frac{s(4)-s(0)}{4-0}=\frac{12-0}{4-0}=3\frac{m}{s}$ Durchschnittsgeschwindigkeit

Zeitintervall $5\le t\le 12$: $\frac{s(12)-s(5)}{12-5}=\frac{60-16{,}25}{7}=6{,}25\frac{m}{s}$ Durchschnittsgeschwindigkeit

c) Momentangeschwindigkeit nach 8 Sekunden:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(8+h)-s(8)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(8+h)^2+2(8+h)-32}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16+4h+\frac{1}{4}h^2+16+2h-32}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(6+\frac{1}{4}h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+\frac{1}{4}h)=6\frac{m}{s}$$ Momentangeschwindigkeit

Direktes Ableiten: $s'(t)=\frac{1}{2}t+2$

Es gilt: $s'(8)=\frac{1}{2}\cdot 8+2=6\frac{m}{s}$ Momentangeschwindigkeit

Aufgabe 3:

Der Punkt an der Stelle x = 1 hat den y-Wert $y=f(1)=-3$, also P(1/-3).

Es gilt $f'(x)=8x^3-10x$.

Steigung der Tangente in P: $f'(1)=-2$

Aufstellen der Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form:

$y-(-3)=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x-1$ Tangentengleichung.

Steigung der Normale: $m_{Normale}=-\frac{1}{m_{Tangente}}=\frac{1}{2}$

Aufstellen der Normalengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form:

$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-3{,}5$ Normalengleichung

Aufgabe 4:

a) Es gilt $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)^2+(x_0+h)-2-(3x_0^2+x_0-2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{3x_0^2+6x_0h+3h^2+x_0+h-2-3x_0^2-x_0+2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h\cdot(6x_0+3h+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(6x_0+3h+1)$

$= 6x_0+1$

b) Es gilt $f'(x) = 6x+1$ (durch direktes Ableiten oder mit a)).

Aus $f'(x) = 7$ folgt $7 = 6x+1 \Rightarrow x = 1$

Wegen f(1) = 2 lauten die Koordinaten des Punktes P(1/2).

c) Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form: $y-2 = 7\cdot(x-1) \Rightarrow y = 7x-5$

Aufgabe 5:

a) $f(x) = 3x^4 + x^{\frac{1}{3}} - 6 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

b) $f(t) = \frac{6}{5}t^{-3} + 2t - 7 \Rightarrow f'(t) = -\frac{18}{5}t^{-4} + 2$

c) $g(s) = 4s^2 - 20s + 25 \Rightarrow g'(s) = 8s - 20$

d) $f'(x) = 18x^2 - 5$

e) $g'(r) = 1$

f) $f(x) = \frac{3x^3}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5} = 3x^{-2} - 2x^{-4} + x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -6x^{-3} + 8x^{-5} - 5x^{-6}$

Aufgabe 6:

a) $f'(x) = \frac{10}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^3 + x$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{30}x^{-6} \Rightarrow g'(x) = -x^{-5} + \frac{1}{5}x^{-7}$

c) $h(x) = \frac{3}{5}x^{15} - \sqrt{3}\cdot x + 7x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-2} + 2\sqrt{3} \Rightarrow h'(x) = 9x^{14} - \sqrt{3} + 3{,}5x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{-3}$

d) $f(a) = a^{\frac{1}{2}}\cdot b \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{2}b\cdot a^{-\frac{1}{2}}$

e) $f(b) = b^{\frac{1}{2}}\cdot a \Rightarrow f'(b) = \frac{1}{2}a\cdot b^{-\frac{1}{2}}$

f) $f'(a) = \sqrt{b}$

g) $f'(q) = 10q$

h) $f'(x) = 4ax + bx^{-2}$

i) $f(x) = \frac{x^2-4}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + 4x^{-2}$

Aufgabe 7:

a) An der Stelle x = -3 fährt das Fahrzeug entlang der Tangente im Kurvenpunkt P(-3/f(-3)), also in P(-3/0).

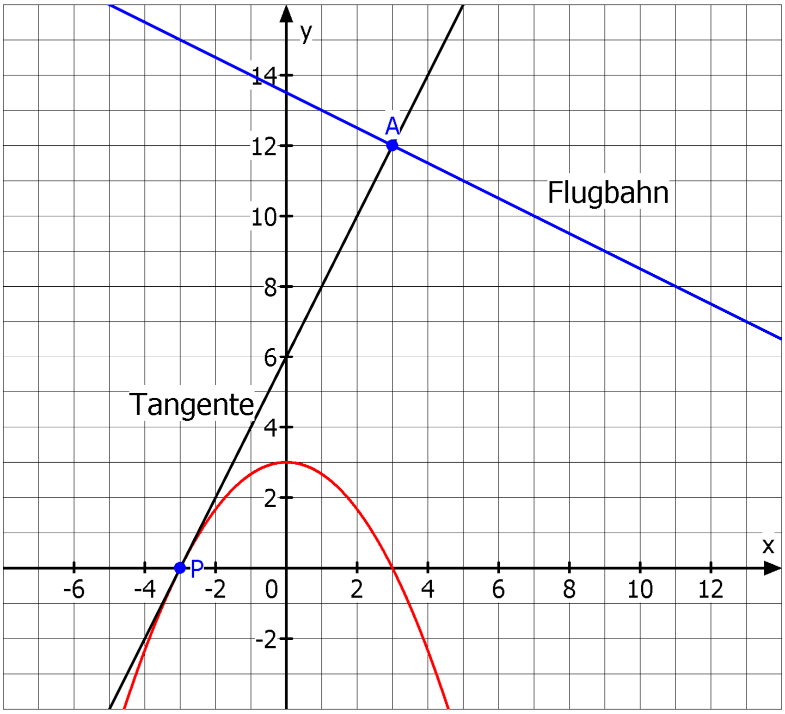
Es gilt $f'(x) = -\frac{2}{3}x$ und damit ist die Tangentensteigung in P $f'(-3) = 2$.

Tangentengleichung mit Punkt-Steigungs-Form: $y - 0 = 2(x+3) \Rightarrow y = 2x + 6$

b) Der Punkt A(3/12) liegt auf der Tangente aus a).
Das Vorderrad fliegt auf einer Gerade, die orthogonal zur Tangente verläuft und den Punkt A(3/12) enthält.

Für die Steigung m der gesuchten Geraden gilt $m \cdot m_{Tangente} = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

Punkt-Steigungs-Form: $y - 12 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 13{,}5$ Flugbahn des Reifens

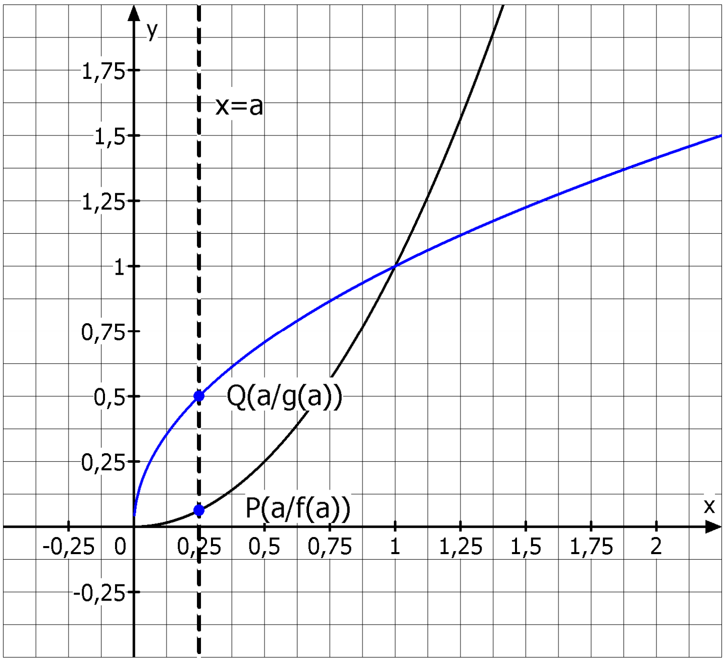


Aufgabe 8:

Die Tangenten in P(a/f(a)) und Q(a/g(a)) sind parallel, wenn gilt: $f'(a) = g'(a)$.

Es gilt $f'(x) = 2x$ und $g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$.

Somit soll gelten: $2a = \frac{1}{2\cdot\sqrt{a}} \Rightarrow 4a^2 = \frac{1}{4a} \Rightarrow a^3 = \frac{1}{16} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \approx 0{,}397$



Aufgabe 9:
Aufstellen der Tangentengleichung im Punkt P(-2/2):
Aus $f'(x) = -1{,}5x^2 - 6x - 5$ folgt $m_{Tangente} = f'(-2) = 1$.
Punkt-Steigungs-Form: $y - 2 = 1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = x + 4$ Tangentengleichung
Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $0 = x + 4 \Rightarrow x = -4$, also S(-4/0).

Aufstellen der Normalengleichung im Punkt P(-2/2):
Es gilt $m_{Normale} = -\frac{1}{m_{Tangente}} = -\frac{1}{1} = -1$
Punkt-Steigungs-Form: $y - 2 = -1(x + 2) \Rightarrow y = -x$ Normalengleichung
Schnittpunkt der Normale mit der x-Achse: $0 = -x \Rightarrow x = 0$, also R(0/0).

Aufgabe 10:
Berechnung der Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)^2 = 0$
Die Lösungen der Gleichung können direkt abgelesen werden: x = 1 oder x = 3
Die Schnittpunkte mit der x-Achse lauten P(1/0) und Q(3/0).

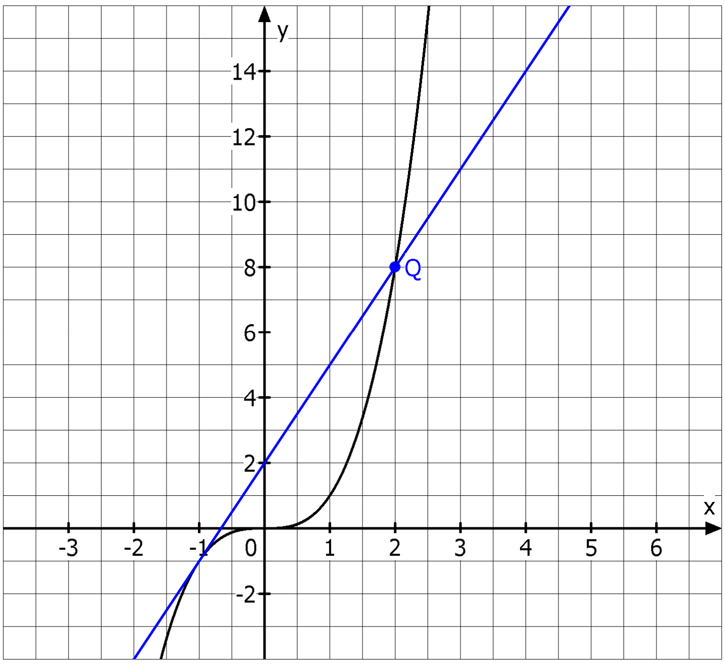
Berechnung des Schnittpunktes mit der y-Achse:
$f(0) = -9$ und somit R(0/-9).

Für die Ermittlung der Steigung wird die Ableitungsfunktion benötigt.
$f(x) = (x-1)(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$
$f'(x) = 3x^2 - 14x + 15$
Steigung in P: $f'(1) = 4$
Steigung in Q: $f'(3) = 0$
Steigung in R: $f'(0) = 15$

Aufgabe 11:
Tangentengleichung im Punkt P(-1/-1):
Mit $f'(x) = 3x^2$ folgt $m_{Tangente} = f'(-1) = 3$.
Punkt-Steigungs-Form: $y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2$ Tangentengleichung

Schnittpunkt der Tangente und des Schaubildes von f:
$x^3 = 3x + 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$
Die Lösung der Gleichung erfolgt mit Hilfe der Polynomdivision.
Eine Lösung der Gleichung lautet x = -1 (da die Tangente das Schaubild an der Stelle x = - 1 berührt, ist diese Lösung schon gegeben).

Polynomdivision: $(x^3 - 3x - 2) : (x + 1) = x^2 - x - 2$
Die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ liefert mit der Mitternachtsformel die Lösungen x = -1 und x = 2.
Damit lautet der Punkt Q(2/f(2)) also Q(2/8).



Aufgabe 12:
Es gilt $f(0) = g_a(0) = 1$ und damit liegt der Punkt S(0/1) auf den Schaubildern von f und von g_a für jeden Wert von a.

Damit sich die Schaubilder in S rechtwinklig schneiden, muss gelten:
$f'(0) \cdot g'(0) = -1$
Es gilt $f'(x) = 2x + 2$ und $g_a'(x) = 2ax - \frac{1}{2}$
$f'(0) \cdot g_a'(0) = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$ also rechtwinkliger Schnitt für jeden Wert von a.