

Doc-Stand: 11/19/2013 12:18:48

## Die Exponentialfunktion Kap.6.3 - Aufgaben zu exponentiellem Wachstum und Zerfall

Bei allen Aufgaben wird exponentielles Wachstum bzw. exponentieller Zerfall vorausgesetzt - sofern nichts anderes in der Aufgabe steht.

### 1.Aufgabe

- a) Auf welchen Betrag wächst ein Waldbestand von  $45\,000\text{m}^3$  bei einem jährlichen Zuwachs von 8% in 10 Jahren an?  
 b) Berechne die Wachstumskonstante  $k$ !  
 c) Wie groß ist die Verdopplungszeit ?

[Lösung Aufgabe 1](#)

### 2.Aufgabe

Eine Nährlösung enthält pro  $\text{cm}^3$  30 000 Keime. Nach Zugabe eines Desinfektionsmittels enthält die Lösung nach 2 Stunden noch 25 000 Keime.

- a) Gib die Zerfallskonstante  $k$  an! - Stelle die Zerfallsgleichung auf!  
 b) Gib die prozentuale Änderung  $p$  pro Stunde an. - Stelle die entsprechende Gleichung auf!  
 c) Wie viele Keime enthält die Lösung nach 5 Stunden?  
 d) Wann enthält die Lösung genau halb so viele Keime pro  $\text{cm}^3$  wie zu Beginn (Halbwertszeit) ?

[Lösung Aufgabe2](#)

### 3.Aufgabe

Eine Bakterienkultur wächst exponentiell in 1 Stunde von 1100 Keimen auf 1250 Keime an.

- a) Berechne die Wachstumskonstante  $k$  und die prozentuale Änderung  $p$  pro Stunde!  
 b) Stelle die entsprechenden Wachstumsgleichungen auf!  
 c) Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Keime verdoppelt?  
 d) Nach welcher Zeit hat die Kultur 11 000 Keime?

[Lösung Aufgabe 3](#)

### 4.Aufgabe

Die folgende Tabelle zeigt das Bevölkerungswachstum einer Großstadt ( Einheit: 1000 E.):

Jahr	1940	1950	1960	1970
E-Anzahl in T.	700	980	1350	1870

- a) Prüfe, ob es sich um exponentielles Wachstum handelt!  
 b) Falls es sich um exponentielles Wachstum handelt, stelle die Wachstumsfunktion auf!  
 c) Unter der Voraussetzung, dass exponentielles Wachstum vorliegt:  
 Wie viele Einwohner hatte die Stadt im Jahr 2000, wird sie im Jahr 2020 haben?

[Lösung Aufgabe 4](#)

### 5.Aufgabe

Zur Untersuchung der Langzeitwirkung eines Medikamentes wird einer Versuchsperson eine Dosis von 70mg verabreicht. Danach wird täglich die Konzentration des Medikamentenwirkstoffes im Blut gemessen.

Zeit in Tagen	0	1	2	3	4
---------------	---	---	---	---	---

Konzentration in mg/L	10,00	7,20	5,18	3,72	2,68
-----------------------	-------	------	------	------	------

- Zeige, dass die Wirkstoffkonzentration exponentiell zurückgeht!
- Bestimme die Zerfallskonstante  $k$ !
- Bestimme die Halbwertszeit!
- Wann sinkt die Konzentration erstmals unter 0,4 mg/L?

[Lösung Aufgabe 5](#)

---

#### 6. Aufgabe

Von Cäsium 137 zerfallen innerhalb eines Jahres etwa 2,3% seiner Masse.

- Stelle die Zerfallsfunktion auf!
- Wieviel Prozent des beim Reaktorunfall in Tschernobyl 1986 ausgetretenen Cäsiums sind noch vorhanden?
- Bestimme die Halbwertszeit von Cäsium 137 !

[Lösung Aufgabe 6](#)

---

#### 7. Aufgabe

Eine Untersuchung über das Risiko von ehemaligen Rauchern, an Lungenkrebs zu erkranken, liefert folgende Werte:

Jahre seit beenden des Rauchens	0	2	4	6	8	10	12
Risiko zu erkranken in %	40	32	23	18	14	10	7

- Zeige, dass das Risiko exponentiell abnimmt!
- Stelle die Risiko-Zerfallsfunktion auf!
- Wie groß ist das Risiko für einen ehemaligen Raucher, der vor 25 Jahren mit dem Rauchen aufgehört hat?
- Das Risiko für einen Nichtraucher zu erkranken beträgt 1%. Nach welchem Zeitraum ist das Risiko des ehemaligen Rauchers auf diesen Wert zurückgegangen?
- Vergleiche das Risiko eines ehemaligen Rauchers, der vor 40 Jahren mit Rauchen aufgehört hat, mit dem eines Nichtrauchers. Interpretiere das Ergebnis!

[Lösung Aufgabe 7](#)

---

#### 8. Aufgabe

Ein PKW verliert pro Jahr ( etwa ) 20% seines Wertes.

- Stelle die Preiszerfallsfunktion auf!
- Wann hat er nur noch die Hälfte seines Wertes?
- Zu welchem Zinssatz müsste ein Kapital angelegt werden, das sich in der gleichen Zeit verdoppelt?

[Lösung Aufgabe 8](#)

---

#### 9. Aufgabe

In Meerwasser nimmt die Lichtintensität pro Meter Wassertiefe auf  $\frac{1}{4}$  des ursprünglichen Wertes ab.

- Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1m, 2m, 10m Wassertiefe noch vorhanden?
- In welcher Wassertiefe sind noch 50%, 10%, 1% der ursprüngliche Intensität erhalten?

[Lösung Aufgabe 9](#)

---

#### 10. Aufgabe

In einer Stadt verbreitet sich ein Gerücht. Die Zahl der Personen, die davon gehört haben, nimmt pro Woche um 15% zu.

Wie lange dauert es, bis alle Bewohner der Stadt ( Weinheim = 40 000; Heidelberg = 130 000) davon gehört haben?

[Lösung Aufgabe 10](#)

---

**11. Aufgabe**

Der Wirkstoff einer Tablette wird im menschlichen Körper exponentiell abgebaut. Unmittelbar nach der Einnahme befinden sich 0,8g des Wirkstoffs im Körper, nach 10 Stunden noch 0,04g.

- Stelle die Zerfallsfunktion auf!
- Wie groß ist die Halbwertszeit?
- Ein Patient bekommt verordnet:

Um 8:00 Uhr 1 Tablette, um 14:00 Uhr 2 Tabletten, um 20:00 Uhr 1 Tablette.

Wie viel Wirkstoff hat er am nächsten Morgen um 8:00 vor Einnahme der Tablette noch im Körper?

[Lösung Aufgabe 11](#)

---

**12. Aufgabe**

Heißer Kaffee von 50°C kühlt sich in einer Tasse langsam auf Umgebungstemperatur (18°C) ab. Der Temperaturabfall wird durch folgende Funktion beschrieben:  $f(t) = 50 e^{-0,03t}$  (t in Minuten).

- Nach wie vielen Minuten ist der Kaffee auf Körpertemperatur (37°C) abgekühlt?
- Wie hoch ist die prozentuale Temperaturänderung (pro Minute) ?
- Geben Sie damit die Gleichung für den Temperaturabfall an !

[Lösung Aufgabe 12](#)

---

**13. Aufgabe**

Auf dem Gebiet des heutigen Bangladesch lebten 1921 33 Millionen Menschen, 1976 waren es 75 Millionen.

- Wie viele werden es 2020 sein (bei gleichbleibenden exponentiellen Wachstum) ?
- Wie hoch ist die jährliche prozentuale Zuwachsrate p?
- Berechne die Verdopplungszeit der Bevölkerung!
- Berechne die Bevölkerungszahl nach 46,436 Jahren, 92,872 Jahren, 139,308 Jahren!

[Lösung Aufgabe 13](#)

---

**14. Aufgabe**

Für ein radioaktives Element gilt folgendes Zerfallsgesetz (t in Minuten):  $N(t) = N_0 e^{-0,322 t}$   
N(t) ist dabei die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch NICHT zerfallenen Teilchen.

- Berechne die prozentuale Zerfallsrate pro Minute!
- Wie groß ist die Halbwertszeit ?
- Wie viele Teilchen sind nach 3,105 Minuten zerfallen?
- Wann sind 90% der Teilchen zerfallen?

[Lösung Aufgabe 14](#)

---

**15. Aufgabe**

1950 schätzte man die Weltbevölkerung auf 2,2 Mrd. Menschen, 1985 auf 4,6 Mrd. .

- Stelle die Wachstumsgleichung auf!
- Überprüfe bzw. verbessere die Gleichung : 1998 gab es 6 Mrd. Menschen auf der Erde.
- Welche Bevölkerungszahl ergibt sich dann für das Jahr 2020 ?
- Welche Bevölkerungszahl ergibt sich für das Jahr 0 ?
- Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate ?
- In welchem Jahr erreichte die Bevölkerungszahl 1 Mrd.?
- Wie hoch ist die Verdopplungszeit?

[Lösung Aufgabe 15](#)

---

**16. Aufgabe**

Wie oft muss man einen 1mm dicken Karton falten, bis der gefaltete Karton sich bis zum Mond ( ca. 380 000 km) stapelt ?

(Nach A. Beutelspacher)

[Lösung Aufgabe 16](#)

---

**17. Aufgabe**

Der Spannungsverlauf (= Restspannung) bei der Entladung eines Kondensators wird beschrieben durch:

$$U(t) = U_0 e^{-t/T}$$

Dabei ist T eine Konstante, die vom Kondensator bzw. Stromkreis abhängt.

( $T = R \cdot C$ , wobei R der Ohmsche Widerstand des Stromkreises und C die Kapazität des Kondensators ist.)

- Bestimme die Spannung nach  $t = T$  Sekunden!
- Bestimme die Zeit t, nach der die Spannung um 99% abgefallen ist!

[Lösung Aufgabe 17](#)

---

#### 18. Aufgabe

Die Intensität einer Gamma-Strahlung wird durch eine Schutzwand von 10 cm Dicke um 20% reduziert.

- Wie groß ist die Intensität dieser Strahlung hinter einer Wand aus gleichem Material von 50cm Dicke?
- Wie dick muss die Wand (gleiches Material) gemacht werden, damit nur noch 10% der ursprünglichen Intensität vorhanden ist?

[Lösung Aufgabe 18](#)

---

#### 19. Aufgabe

Ein radioaktives Element hat eine Halbwertszeit von 87 Jahren.

- Bestimme die Zerfallskonstante k! - Stelle die Zerfallsgleichung auf!
- Um wieviel Prozent nimmt die Zahl der Teilchen pro Jahr ab?
- Wie viele Jahre dauert es, bis 99% der Teilchen zerfallen sind?

[Lösung Aufgabe 19](#)

---

#### 20. Aufgabe

Für eine Altersbestimmung von organischem Material verwendet man die Tatsache, dass die Luft schon immer einen konstanten Anteil des radioaktiven Kohlenstoffisotops  $C_{14}$  enthielt. Über die Atmung wird dieses in den lebenden Organismus aufgenommen. Deshalb finden in lebender Materie dauernd ca. 16 000  $C_{14}$ -Zerfälle je Minute und Kg organischen Gewebes statt. Wenn bei Eintritt des Todes die Atmung aufhört, werden der toten Materie keine neuen  $C_{14}$  - Isotope mehr zugeführt. Der Anteil des radioaktiven  $C_{14}$ -Isotopes im toten Gewebe nimmt deshalb durch Zerfall dauernd weiter ab, die Anzahl der Zerfälle geht zurück.

$C_{14}$  hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren.

- Berechne die Zerfallskonstante
- Wie viele  $C_{14}$ -Isotope müssen in 1Kg lebender Materie vorhanden sein, damit 16 000 Zerfälle pro Minute stattfinden?

Stelle die Zerfallsgleichung für  $C_{14}$  auf!

- Messungen an der Mumie Tut-Ench-Amuns ergaben 1985, dass etwa 10720 Zerfälle pro Minute und Kg stattfanden. In welchem Jahr starb Tut-Ench-Amun?

[Lösung Aufgabe 20](#)

---

#### 21. Aufgabe

Bei einer Untersuchung des Turiner Grabtuches stellte man eine Aktivität von 13,84  $C_{14}$ -Zerfällen pro Gramm Kohlenstoff und Minute fest.

Wie alt ist das Tuch, wenn noch lebendes Material eine Aktivität von 15,30 Zerfällen pro Gramm C und Minute besitzt ?

Die Zerfallsfunktion für  $C_{14}$ :  $z(t) = z_0 e^{-1,2097 \cdot 10^{-4} t}$ , wobei t in Jahren und z(t) die Anzahl der Zerfälle angibt!

[Lösung Aufgabe 21](#)

---

#### 22. Aufgabe

1991 wurde in den Alpen die Gletschermumie "Ötzi" gefunden. Sie enthielt noch 53,3% des  $C_{14}$ -Isotops, das in lebendem Gewebe vorhanden ist.

Wann starb "Ötzi"?

**Hinweis:**

Die Zerfallsgleichung von  $C_{14}$ :  $N(t) = N_0 e^{-1,2097 \cdot 10^{-4} t}$ ,  $t$  in Jahren

$N(t)$  gibt die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$  noch NICHT zerfallenen  $C_{14}$ -Teilchen an!

[Lösung Aufgabe 22](#)

---

---

**Projekt:**

Untersuche, ob der Schaum in einem (gut gefüllten!) Bierglas exponentiell abnimmt - von alleine!

Untersuche dabei auch die Einflüsse von Biersorte / -marke, Temperatur, Gefäß, Spülmittel-, Spülwasserresten usw.

---