Ableitungsübungen

W. Kippels

16. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hier werden etliche Übungsaufgaben zum Erstellen von Ableitungen diverser Funktionen vorgestellt. Es soll jeweils die **erste** und die **zweite** Ableitung gebildet werden. Unter der **zweiten** Ableitung versteht man die Ableitung der (ersten) Ableitung. Man betrachtet also die zunächst bestimmte Ableitung als gegebene Funktion und leitet diese noch einmal ab.

Die notwendigen Grundlagen sind hier zu finden:

http://members.dokom.net/w.kippels/aufgaben/ablreg.pdf

2 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen!

2.1 Funktion 1

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + \pi x - \pi^2$$

2.2 Funktion 2

$$f(x) = 2x^5 - 3e^2x^3$$

2.3 Funktion 3

$$f(x) = (2x + 5) \cdot (3x - 4)$$

2.4 Funktion 4

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

2.5 Funktion 5

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$$

2.6 Funktion 6

$$f(x) = (\sqrt{x} - 2) \cdot e^x$$

2.7 Funktion 7

$$f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$$

2.8 Funktion 8

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

2.9 Funktion 9

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

2.10 Funktion 10

$$f(x) = \frac{x \cdot e^x}{5x - 1}$$

2.11 Funktion 11

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

2.12 Funktion 12

$$f(x) = \sin x^4$$

2.13 Funktion 13

$$f(x) = \sin^4 x$$

2.14 Funktion 14

$$f(x) = 2e^{5x}$$

2.15 Funktion 15

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

3 Lösungen

3.1 Funktion 1

$$\mathrm{f}(x) = 4x^3 - 12x^2 + \pi x - \pi^2$$

Die Ableitungen können mit der Summenregel und der Konstantenregel mit Hilfe der Potenzfunktion bestimmt werden. Zu bemerken ist allenfalls, dass π und somit auch $\pi^2 \approx 9,87$ eine Konstante ist und entsprechend behandelt wird.
$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x^1 + \pi x^0 = 12x^2 - 24x + \pi$
$f''(x) = 12 \cdot 2x^1 - 24 \cdot 1x^0 = 24x - 24$

3.2 Funktion 2

$$f(x) = 2x^5 - 3e^2x^3$$

Lösungen wie bei Funktion 1. Hier ist e^2 mit $\approx 7,389$ wie zuvor schon π natürlich als Konstante zu behandeln.
$f'(x) = 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot e^2 \cdot 3x^2 = 10x^4 - 9e^2x^2$
$f''(x) = 10 \cdot 4x^3 - 9 \cdot e^2 \cdot 2x^1 = 40x^3 - 18e^2x$

3.3 Funktion 3

$$f(x) = (2x + 5) \cdot (3x - 4)$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.
$f(x) = (2x + 5)(3x - 4)$

- $u(x) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2$
- $v(x) = 3x - 4 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 3$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2 \cdot (3x - 4) + (2x + 5) \cdot 3 = 6x - 8 + 6x + 15 = 12x + 7$

Die zweite Ableitung geht dann ganz einfach mit der Kostantenregel:
$f''(x) = 12$

Alternativ kann man die erste Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen, indem man zunächst bei $f(x)$ die Klammern ausmultipliziert und danach mit Summen- und Konstantenregel weiter arbeitet.
$f(x) = (2x + 5)(3x - 4) = 6x^2 - 8x + 15x - 20 = 6x^2 + 7x - 20 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 12x + 7$

3.4 Funktion 4

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$
- $v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Für die zweite Ableitung muss die Produktregel sowohl für das erste als auch das zweite Produkt angewendet werden. Ich nenne das erste Produkt $g(x)$ und das zweite Produkt $h(x)$.

$$g(x) = 2x \cdot \sin x \qquad h(x) = x^2 \cdot \cos x$$

Beginnen wir mit $g'(x)$:

- $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$
- $v(x) = \sin x \Rightarrow v'(x) = \cos x$

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$$

Nun wird nach gleichem Muster $h'(x)$ berechnet.

$$h(x) = x^2 \cdot \cos x$$

- $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

$$h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x$$

Jetzt wird alles nach der Summenregel zusammengesetzt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= g'(x) + h'(x) \\ &= 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x \\ f''(x) &= (2 - x^2) \cdot \sin x + 4x \cdot cosx \end{aligned}$$

3.5 Funktion 5

$$f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = x^2 + 3x \Rightarrow u'(x) = 2x + 3$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x) \cdot e^x = (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x$$

Auch die zweite Ableitung muss mit der Produktregel bestimmt werden.

- $u(x) = x^2 + 5x + 3 \Rightarrow u'(x) = 2x + 5$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = (2x + 5) \cdot e^x + (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x = (x^2 + 7x + 8) \cdot e^x$$

3.6 Funktion 6

$$f(x) = (\sqrt{x} - 2) \cdot e^x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Vorweg bestimme ich aber die Ableitung der Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$.

$$g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Ich bilde nun die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \left(\sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x = \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x$$

Die zweite Ableitung wird wiederum mit der Produktregel gebildet. Vorweg bestimme ich jedoch die Ableitung der Teilfunktion $h(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

$$h(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$$

Ich bilde nun die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2 \Rightarrow u'(x) = -\dfrac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
- $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) \cdot e^x + \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x \\ f''(x) &= \left(-\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2\right) \cdot e^x \end{aligned}$$

3.7 Funktion 7

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

Die Funktion ist als Bruch, also als Quotient dargestellt. Daher kommt natürlich die Quotientenregel zum Einsatz. Wir bestimmen zunächst die Teilfunktionen des Zählers und des Nenners sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) = 2x+1 \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = 2x-1 \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = 2 \end{aligned}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f'(x) &= \frac{2 \cdot (2x-1) - (2x+1) \cdot 2}{(2x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{4x - 2 - 4x - 2}{(2x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{-4}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Die hierbei festgelegten Unterfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ haben nichts mit den gleichnamigen Unterfunktionen aus der Bestimmung der ersten Ableitung zu tun. Die Namen werden also neu vergeben.

Tipp: Für die Ableitung der Nennerfunktion $v(x) = (2x-1)^2$ benötigen wir die Kettenregel. Man könnte zwar auch vorher den Nennerterm mit Hilfe der zweiten Binomischen Formel in ein Polynom verwandeln, das dann einfach abzuleiten ist, aber davon möchte ich abraten. Warum?

Normalerweise ist das Bestimmen der zweiten Ableitung kein Selbstzweck, sondern man benötigt sie, um damit weiter zu arbeiten. Da ist es günstig, wenn man sie zuvor vereinfacht. Das geht ***immer*** besser, wenn die faktorisierte Form aus der Kettenregel vorliegt, denn dann man kann den Bruch kürzen. Das schaun wir uns jetzt an.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\,4}{(2x-1)^2} \\
u(x) = -4 &\Rightarrow u'(x) = 0 \\
v(x) = (2x+1)^2 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 2x-1 & \Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(2x-1) \\ v'(x) = 2\cdot 2(2x-1) & = & 4(2x-1) \end{array} \right\} \\
f''(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
f''(x) &= \frac{0\cdot(2x+1)^2 - (-4)\cdot 4(2x-1)}{(2x-1)^4} \\
f''(x) &= \frac{16\cdot(2x-1)}{(2x-1)^4} \\
f''(x) &= \frac{16}{(2x-1)^3}
\end{aligned}
$$

3.8 Funktion 8

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Auch bei dieser Funktion kommt die Quotientenregel zum Einsatz, weil sie einen Bruch darstellt. Die Unterfunktionen und deren Ableitungen lauten:

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^2 - 1 & \Rightarrow & u'(x) = 2x \\ v(x) = x^2 + 1 & \Rightarrow & v'(x) = 2x \end{array}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Auch hier empfehle ich, den Nennerterm nicht auszumultiplizieren, sondern lieber für $v'(x)$ die Kettenregel zu verwenden.

$$\begin{array}{rcl} u(x) = 4x & \Rightarrow & u'(x) = 4 \\ v(x) = (x^2+1)^2 & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = x^2 + 1 & \Rightarrow & g'(x) = 2x \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(x^2 + 1) \\ v'(x) = 2x \cdot 2(x^2 + 1) & = & 4x(x^2 + 1) \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \quad |(x^2 + 1) \text{ ausklammern} \\ f''(x) &= \frac{(x^2 + 1) \cdot [4 \cdot (x^2 + 1) - 16x^2]}{(x^2 + 1)^4} \quad | \text{ kürzen} \\ f''(x) &= \frac{4 \cdot (x^2 + 1) - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ f''(x) &= \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ f''(x) &= \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

3.9 Funktion 9

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$$

Hier ist es sehr sinnvoll, sich vor dem Losrechnen die Funktion einmal genauer anzusehen. Der Zähler lässt sich nämlich als Binom deuten. Damit lässt sich die Funktion deutlich vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x-2)^2}{x - 2} = x - 2$$

Durch das Kürzen wurde übrigens auch der Definitionsbereich erweitert, $x = 2$ gehört jetzt auch dazu.

In dieser Form lassen sich die Ableitungen ganz einfach bilden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Sieht man diese Vereinfachungsmöglichkeit **nicht**, dann bleibt nur die Quotientenregel, weil die Funktion einen Bruch darstellt. Die Teilfunktionen und deren Ableitungen lauten dann:

$$\begin{aligned} u(x) = x^2 - 4x + 4 &\;\Rightarrow\; u'(x) = 2x - 4 \\ v(x) = x - 2 &\;\Rightarrow\; v'(x) = 1 \end{aligned}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung kommt wieder die Quotientenregel zum Einsatz. Auch hier empfehle ich, den Nennerterm nicht auszumultiplizieren, sondern lieber für $v'(x)$ die

Kettenregel zu verwenden.

$$u(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x - 4$$

$$v(x) = (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = x - 2 & \Rightarrow & g'(x) = 1 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(x-2) \\ v'(x) = 1 \cdot 2(x-2) & = & 2(x-2) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(2x-4) \cdot (x-2)^2 - (x^2 - 4x + 4) \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} \quad | \text{ (x-2) ausklammern} \\
&= \frac{(x-2) \cdot \Big((2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 2\Big)}{(x-2)^4} \quad | \text{ kürzen} \\
&= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8}{(x-2)^3} \\
f''(x) &= \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x-2)^3}
\end{aligned}$$

Natürlich sind diese Ableitungen mit den einfachen Formen im ersten Ansatz identisch. Dazu müsste man wieder Zähler und Nenner faktorisieren und kürzen. Wer das im Anfang aber schon nicht gesehen hat, der sieht das hier erst recht nicht.

3.10 Funktion 10

$$f(x) = \frac{x \cdot e^x}{5x-1}$$

Und wieder kommt die Quotientenregel zum Einsatz, weil sie einen Bruch darstellt. Im Zähler haben wir aber ein Produkt. Wir benötigen also zur Ableitung des Zählers die Produktregel. Die Teilfunktionen und deren Ableitungen lauten:

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x \cdot e^x & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} U(x) = x & \Rightarrow & U'(x) = 1 \\ V(x) = e^x & \Rightarrow & V'(x) = e^x \\ u'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x & = & (1+x) \cdot e^x \end{array} \right\} \\ v(x) = 5x-1 & \Rightarrow & v'(x) = 5 \end{array}$$

Diese Terme setzen wir gemäß der Quotientenregel ein und erhalten die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(1+x) \cdot e^x \cdot (5x-1) - x \cdot e^x \cdot 5}{(5x-1)^2} \\ &= \frac{(5x-1+5x^2-x-5x) \cdot e^x}{(5x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{(5x^2-x-1) \cdot e^x}{(5x-1)^2} \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt. Da wir im Zähler wieder ein Produkt haben, muss hier in der Nebenrechnung die Produktregel verwendet werden. Bei der Ableitung des Nenners kommt die Kettenregel zum Einsatz.

$$u(x) = (5x^2 - x - 1)e^x \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} U(x) = (5x^2 - x - 1) & \Rightarrow & U'(x) = 10x - 1 \\ V(x) = e^x & \Rightarrow & V'(x) = e^x \\ u'(x) = (10x-1)e^x + (5x^2 - x - 1)e^x & = & (5x^2 + 9x - 2)e^x \end{array} \right\}$$

$$v(x) = (5x-1)^2 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 5x - 1 & \Rightarrow & g'(x) = 5 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g = 2(5x-1) \\ v'(x) = 5 \cdot 2(5x-1) & = & 10(5x-1) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(5x^2 + 9x - 2)e^x \cdot (5x-1)^2 - (5x^2 - x - 1)e^x \cdot 10(5x-1)}{(5x-1)^4} \\
&= \frac{(5x-1) \cdot \Big((5x^2 + 9x - 2)e^x \cdot (5x-1) - (5x^2 - x - 1)e^x \cdot 10\Big)}{(5x-1)^4} \\
&= \frac{\Big((5x^2 + 9x - 2) \cdot (5x-1) - (5x^2 - x - 1) \cdot 10\Big) \cdot e^x}{(5x-1)^3} \\
&= \frac{(25x^3 - 5x^2 + 45x^2 - 9x - 10x + 2 - 50x^2 + 10x + 10) \cdot e^x}{(5x-1)^3} \\
f''(x) &= \frac{(25x^3 - 10x^2 - 9x + 12) \cdot e^x}{(5x-1)^3}
\end{aligned}$$

3.11 Funktion 11

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

Diese Funktion stellt sich als Produkt dar. Demnach wird die Produktregel verwendet. Ich bilde also vorweg die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

- $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$
- $v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -\sin x$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Für die zweite Ableitung kommt die Summenregel zum Einsatz. Dabei wird für jeden Summanden die Kettenregel benötigt.

$u(x) = \cos^2 x$

- $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$
- $u(g) = g^2 \Rightarrow u'(g) = 2g$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot (-\sin x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$u(x) = \sin^2 x$

- $g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$
- $u(g) = g^2 \Rightarrow u'(g) = 2g$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$f''(x) = u'(x) - v'(x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -4 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

3.12 Funktion 12

$$f(x) = \sin x^4$$

Hier haben wir das klassische Beispiel einer Funktion von einer Funktion, also zur Anwendung der Kettenregel. Die *innere Funktion* ist der Teil, der *zuerst* berechnet werden muss. Das ist in diesem Fall das x^4. Daher muss dieser Term als $g(x)$ bezeichet werden.
$f(x) = \sin x^4$
- $g(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4x^3$
- $f(g) = \sin g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = \cos g$

$f'(x) = g'(x) \cdot f'(g) = 4x^3 \cdot \cos g = 4x^3 \cos x^4$

Für die zweite Ableitung benötigen wir die *Produktregel*, denn $f(x)$ ist das Produkt zweier Teilfunktionen. Dabei ist zur Bestimmung von v'(x) als Nebenrechnung noch zusätzlich die Kettenregel notwendig.
- $u(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 12x^2$
- $v(x) = \cos x^4 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4x^3 \\ \bullet \quad v(g) = \cos g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -\sin g \\ v'(x) = 4x^3 \cdot (-\sin g) = -4x^3 \sin x^4 \end{array} \right\}$

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 12x^2 \cdot \cos x^4 + 4x^3 \cdot (-4x^3 \sin x^4)$
$f''(x) = 12x^2 \cos x^4 - 16x^6 \sin x^4$

3.13 Funktion 13

$$f(x) = \sin^4 x$$

Auf den ersten Blick ist dies das gleiche, wie bei Funktion 4. Tatsächlich muss aber hier zuerst der Sinuswert bestimmt werden, bevor die vierte Potenz gebildet wird. Daher ist jetzt die Sinusfunktion die innere Funktion.
$f(x) = \sin^4 x$
- $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x$
- $f(g) = g^4 \quad \Rightarrow \quad f'(g) = 4g^3$

$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 4g^3 \cdot \cos x = 4 \sin^3 x \cdot \cos x$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kommt wie zuvor die Produktregel zum Einsatz. Ebenso benötigen wir bei der Bestimmung von $u'(x)$ in der Nebenrechnung auch noch die Kettenregel.
- $u(x) = 4 \sin^3 x \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x \\ \bullet \quad u(g) = 4g^3 \quad \Rightarrow \quad u'(g) = 12g^2 \\ u'(x) = 12g^2 \cdot \cos x = 12(\sin^2 x) \cdot \cos x \end{array} \right\}$
- $v(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -\sin x$

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 12(\sin^2 x) \cdot (\cos x) \cdot \cos x + 4(\sin^3 x) \cdot (-\sin x)$
$f''(x) = 12(\sin^2 x) \cos^2 x - 4 \sin^4 x$

3.14 Funktion 14

$$f(x) = 2e^{5x}$$

Wieder haben wir eine Funktion von einer Funktion, also kommt die Kettenregel zum Einsatz. Hierbei ist der Exponent zuerst zu berechnen; daher stellt er die innere Funktion dar.
$f(x) = 2e^{5x}$

- $g(x) = 5x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 5$
- $f(g) = 2e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = 2e^g$

$f'(x) = g'(x) \cdot f'(g) = 5 \cdot 2e^g = 10e^{5x}$

Für die zweite Ableitung ist ebenfalls die Kettenregel erforderlich, denn wir haben wieder die Funktion von einer Funktion. Dazu schreibe ich vorübergehend $h(x)$ für $f'(x)$.
$h(x) = 10e^{5x}$

- $g(x) = 5x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 5$
- $h(g) = 10e^g \quad \Rightarrow \quad h'(g) = 10e^g$

$f''(x) = h'(x) = 5 \cdot 10e^g = 50e^{5x}$

3.15 Funktion 15

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Hier haben wir eine doppelte Verkettung. Was heißt das?
Zunächst gibt es eine innere Funktion $h(x) = 3x$. Auf diese Funktion wird nun der Sinus angewendet. Es gibt also eine nachgeschaltete Unterfunktion $g(h) = \sin h$. Auf diese Funktion wird dann noch einmal eine Funktion angewendet, nämlich die Exponentialfunktion $f(g) = e^h$. Wir haben also die Kettenregel doppelt anzuwenden. Das kann man tun, indem man zunächst in der Form einer Nebenrechnung $g'(x)$ bildet, man kann aber auch sofort anwenden:

$$f(x) = f(g(h(x))) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = h'(x) \cdot g'(h) \cdot f'(g)$$

Das führen wir nun durch.
$f(x) = e^{\sin 3x}$

- $h(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3$
- $g(h) = \sin h \quad \Rightarrow \quad g'(h) = \cos h$
- $f(g) = e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = e^g$

$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h) \cdot f'(g) = 3 \cdot (\cos h) \cdot e^g = 3(\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x}$

Die zweite Ableitung wird nun etwas komplizierter, da wir ja ein Produkt aus den beiden Teilfunktionen $u(x) = 3\cos 3x$ und $v(x) = e^{\sin 3x}$ haben. Die Teilableitung $u'(x)$ müssen wir wiederum mit der Kettenregel bestimmen! Glücklicherweise haben wir mit $v'(x)$ keine große Mühe; da $v(x) = f(x)$ ist, ist natürlich auch $v'(x) = f'(x)$.

$$f'(x) = 3\cos 3x \cdot e^{\sin 3x}$$

- $u(x) = 3\cos 3x \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lll} \bullet \;\; g(x) = 3x & \Rightarrow & g'(x) = 3 \\ \bullet \;\; u(g) = 3\cos g & \Rightarrow & u'(g) = -3\sin g \\ u'(x) = 3 \cdot (-3\sin g) = -9\sin 3x & & \end{array} \right\}$
- $v(x) = e^{\sin 3x} \;\Rightarrow\; v'(x) = 3(\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = -9(\sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + 3(\cos 3x) \cdot 3(\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x} \\ f''(x) &= -9(\sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + 9(\cos^2 3x) \cdot e^{\sin 3x} \end{aligned}$$

Wer möchte, kann noch $9e^{\sin 3x}$ ausklammern. Ob das allerdings schöner ist, ist auch Geschmacksache. Man erhielte dann:

$$f''(x) = 9e^{\sin 3x}(\cos^2 3x - \sin 3x)$$

3.16 Funktion 15

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Hier muss die Kettenregel angewendet werden und zwar gleich doppelt.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 3x & \Rightarrow & g'(x) & = & 3 \\ h(g) & = & \sin g & \Rightarrow & h'(g) & = & \cos g = \cos 3x \\ f(h) & = & e^h & \Rightarrow & f'(h) & = & e^h = e^{\sin 3x} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & g'(x) \cdot h'(g) \cdot f'(h) \\ f'(x) & = & 3 \cdot (\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x} \end{array}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden. Gleichzeitig muss für den ersten Faktor $u(x) = 3 \cdot \cos 3x$ die Kettenregel angewendet werden.
Die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = e^{\sin 3x}$ ist bereits bekannt, denn dieser zweite Faktor stellt $f(x)$ dar. $v'(x)$ ist also identisch mit $f'(x)$.

$$\begin{array}{rcl} u(x) = 3 \cdot \cos 3x & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) = 3x & \Rightarrow & g'(x) = 3 \\ u(g) = 3 \cdot \cos g & \Rightarrow & u'(g) = -3 \cdot \sin g = -3 \cdot \sin 3x \\ u'(x) = 3 \cdot (-3 \cdot \sin 3x) & = & -9 \cdot \sin 3x \end{array} \right\} \\ v(x) = e^{\sin 3x} & \Rightarrow & v'(x) = 3 \cdot (\cos 3x) \cdot e^{\sin 3x} \end{array}$$

Nun kann die Produktregel angewendet werden.

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ & = & (-9 \cdot \sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + (3 \cdot \cos 3x) \cdot 3 \cdot \cos 3x \cdot e^{\sin 3x} \\ & = & -9 \cdot (\sin 3x) \cdot e^{\sin 3x} + 9 \cdot (\cos^2 3x) \cdot e^{\sin 3x} \\ f''(x) & = & (-9 \cdot \sin 3x + 9 \cdot \cos^2 3x) \cdot e^{\sin 3x} \end{array}$$