Euklid und die Elemente ©

Die Entdeckung der axiomatischen Methode durch Euklid

Norbert Froese

Stand: 02.02.2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die *Elemente* sind das mit Abstand einflussreichste Buch der Mathematik-Geschichte. Besonders dessen Kapitel über die Geometrie haben in der Mathematik beispielgebend gewirkt. Sie charakterisieren paradigmatisch das (danach und dadurch verbindlich gewordene) *Leitbild* der akademischen Mathematik.

Der Autor der *Elemente*, Euklid (Euclid, Eukleides, Eucleides), wirkte um 300 v.Chr. in Alexandria. Über verlässliche, genauere Lebensdaten verfügen wir leider nicht. Selbst zu Geburts- und Todesjahr kursieren stark unterschiedliche Zahlen. Sein Geburtsort ist unklar.

Euklid gilt als Begründer der alexandrinischen Schule der Mathematik. Dass Euklid von Ptolemaios I. nach Alexandria eingeladen wurde und dort am Aufbau des Museions[1] beteiligt war ist wahrscheinlich, aber nicht wirklich gesichert.

Vor seiner Tätigkeit in Alexandria hat Euklid vermutlich einige Jahre an der platonischen Akademie in Athen verbracht. Auf jeden Fall ist sein Verständnis von Mathematik stark durch die platonische Lehre geprägt. Neben den *Elementen* hat Euklid noch weitere mathematische Bücher, sowie optische, astronomische und musiktheoretische Schriften verfasst. Sein Ruhm bezieht sich aber praktisch ausschließlich auf sein Hauptwerk: Die *Elemente.*

Noch bis weit in das 19. Jahrhundert hinein gehörten die *Elemente* zu den Standardtexten zur Einführung in *akademische* Mathematik. Euklids *Elemente* wurden unzählige Male als Abschriften kopiert, in die verschiedensten Sprachen übersetzt und (seit der Erfindung der Druckkunst) in immer neuen Auflagen verbreitet.

> Euklids „Elemente“ gehören zu den bemerkenswertesten Werken der Weltliteratur. Bis gegen Ende des vorherigen Jahrhunderts (*des 19. Jahrhunderts; N.F.*) waren die Bände des Euklid nebst der Bibel die am weitesten auf der Welt verbreiteten „Bestseller“.[2]

Die allermeisten der in den *Elementen* enthaltenen mathematischen Sätze hat Euklid nicht neu entdecken müssen. Er konnte sie der damals schon umfangreichen antiken Tradition der beweisenden Mathematik entnehmen.[3] Bei den mehreren hundert Sätzen der *Elemente* kommt Euklid die Priorität des ersten Beweises höchstens in einigen wenigen Fällen zu. Er ist trotz seines Jahrtausende währenden Ruhms kein klassisches Jahrtausend Genie der Mathematik gewesen. Er spielt, was mathematische Kreativität angeht, eindeutig *nicht* in der gleichen Liga wie Archimedes, Newton oder Gauß.

Euklid ist kein genialer Entdecker mathematischen Neulands, er ist ein herausragender Systematisierer des bereits Bekannten. Er bringt das verfügbare mathematische Wissen in eine systematische Ordnung und präsentiert dabei die Geometrie in Form einer *axiomatischen* Theorie.[4] Und genau darin besteht die von ihm ausgehende tiefgreifende wie anhaltende Prägung der Mathematik:

---

1 Das Museion war die mit der berühmten alexandrinischen Bibliothek verbundene Akademie.

2 Herbert Meschkowski: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig: Vieweg 1990. S.18

3 Welche vorfindlichen Quellen Euklid in welchem Teil seiner *Elemente* benutzt und verarbeitet hat, ist Gegenstand umfangreicher mathematik-historischer Forschungen. (Siehe hierzu auch: *Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid* unter www.antike-griechische.de/Pythagoras.pdf)

4 Auch wenn Euklid hierfür keine neuen bedeutenden Sätze beweisen musste, sollte man die rein mathematische Leistung, die dahinter steht aber auch nicht zu gering schätzen. Er musste nicht nur die Reihenfolge der Sätze sorgfältig planen, sondern wird wahrscheinlich mehr als einmal dazu gezwungen gewesen sein, die vorfindlichen Beweise seiner Systematik anzupassen, d.h. durch neue, eigene Beweise zu ersetzen.

> Am Anfang einer mathematischen Theorie stehen die unbewiesen bleibenden Axiome. Dann folgen die Sätze und deren Beweis. In jedem Beweis darf dabei (außer den Axiomen) ***nur*** verwendet werden, was vorher bereits bewiesen wurde.

Nimmt man dieses „***nur***" ernst, bis hin zur letzten Konsequenz, dann ist es revolutionär. Die auf den ersten Blick so harmlos wirkende Idee wird dann eines der wirkmächtigsten Konzepte der Geistesgeschichte: *Kein Beweis darf jenseits des Rückgriffs auf Axiome und bereits Bewiesenes an die Anschauung oder sonstige Mittel der Einsicht appellieren*. Skizzen bleiben zwar weiterhin als nützliches didaktisches Hilfsmittel erlaubt, sind aber *kein* Beweismittel mehr! Jeder Beweisschritt muss sich ***allein*** durch Verweis auf die Axiome und die schon vorher bewiesenen Sätze rechtfertigen lassen.

Diese Strenge zwingt zu einer nur mühsam erreichbaren Genauigkeit des Denkens. Einer Genauigkeit und Penibilität, die sich dann aber auch als ungeheuer fruchtbar erweisen kann.[5]

Man wird gezwungen darüber nachzudenken, welche Axiome man einer Theorie zu Grunde legen will (muss, sollte), und man muss darüber nachdenken, wie man die häufig so suggestive Kraft der Anschauung sauber in strenge Beweise übersetzt. Beides hat allerlei Arten von überraschenden wie produktiven Einsichten zu Tage gefördert. Wenn wir heute in unseren besten Theorien die Grenzen unseres anschaulichen Denkens überwinden können, dann nicht zuletzt deswegen, weil der Rückgriff auf die Anschauung so entschieden aus den Beweismethoden der Mathematik verbannt wurde.

Die besondere intellektuelle Disziplin, die dem menschlichen Geist bei einer axiomatischen Theorie abverlangt wird, lässt Probleme ins Bewusstsein treten, die sonst leicht der Wahrnehmung entgangen wären. Ein besonders prominentes Beispiel hierfür ist die Diskussion über das berühmte *Parallelenaxiom* der *Elemente*.

Das *Parallelenaxiom* der *Elemente*:

> In der Ebene existiert zu einer Geraden g und einem außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt A, genau eine Gerade, die sowohl durch den Punkt A geht, wie *nicht* die Gerade g schneidet.[6]

Schon sehr bald stellte sich die Frage, ob dieses Axiom wirklich notwendig ist, oder ob man diesen Sachverhalt nicht doch allein auf Grundlage der anderen Axiome in Euklids *Elementen* beweisen könne.[7] Das ist das sogenannte *Parallelenproblem*. Die Jahrhunderte währende Diskussion mündete letztlich in die sensationelle Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien (Gauß, Lobatschewski, Bolyai).[8] Und genau aus diesen nicht-euklidischen Geometrien erwuchs dann später das mathematische Gerüst der *Allgemeinen Relativitätstheorie* Einsteins.

Es zeigt sich einerseits, dass das *Parallelenaxiom* beim Aufbau der euklidischen Geometrie *keineswegs* überflüssig ist, andererseits, dass die selbstverständliche Unterstellung der euklidischen Struktur des physikalischen Raums hinterfragt werden muss.

Ohne die axiomatische Struktur der euklidischen Geometrie wäre das *Parallelenproblem* wohl kaum ins Bewusstsein getreten und man wäre wohl nur schwerlich zur Theorie nicht-

---

5 Mathematische Theorien erreichen diese angestrebte Strenge übrigens nicht immer auf Anhieb. Es ist häufig ein langer Entwicklungsprozess notwendig bis man dem Ideal wirklich nahe kommt.

6 Die Formulierung bei Euklid lautet etwas anders, meint aber genau das Gleiche. Ich habe mir hier erlaubt Euklids Parallelenaxiom in einer deutlich modernisierten Fassung wiederzugeben.

7 Der Punkt, ob der im Parallelenaxiom formulierte Sachverhalt zutrifft, stand dabei (zunächst) gar nicht zur Diskussion.

8 Geometrien, in denen jeweils genau *eine* Parallele existiert, heißen *euklidisch*. Geometrien in denen dies nicht der Fall ist, nennt man *nicht-euklidisch*.

euklidischer Geometrien vorgedrungen. Die These, dass es ohne die Axiomatisierung der Geometrie keine Allgemeine Relativitätstheorie gäbe, ist also keineswegs besonders absurd.

Aber schon vor der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien hat die Beschäftigung mit dem *Parallelenproblem* eine Vielzahl mathematischer Einsichten zu Tage gefördert, die unser Verständnis der Geometrie deutlich verbessert haben. So wurde bei der Diskussion des *Parallelenproblems* z.B. bewiesen, dass das euklidische *Parallelenaxiom* und die Behauptung, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, logisch gleichwertig sind.[9]

Pythagoras hat die Tradition der beweisenden Mathematik begründet,[10] Euklid aber hat der Mathematik das Leitbild der axiomatischen Theorie geschenkt.

Die *Einzigkeit* der griechischen Antike zeigt sich nicht zuletzt darin, dass keine andere Kultur etwas zu Euklids *Elementen* Gleichwertiges hervor gebracht hat. *Vielleicht* gab es in der chinesischen Kultur *unabhängig* von den Griechen erste Ansätze einer beweisenden Mathematik, aber etwas den *Elementen* auch nur entfernt Ähnliches sucht man dort vergebens.

Die heutige Mathematik nimmt ihren Ursprung in der griechischen Antike. Euklids *Elemente* dokumentieren dabei einen sehr markanten Punkt. Das Konzept der axiomatischen Theorie hat hier seinen ersten Auftritt.

Angesichts der hoffentlich recht deutlich herausgestrichenen Bedeutung von Euklid stellt sich natürlich auch die Frage auf wessen Schultern er stand. Nun, dass die in den *Elementen* enthaltenen Sätze alle (oder beinahe alle) schon bekannt waren, wurde bereits erwähnt. Es bleibt nachzutragen, dass Euklid keineswegs der erste war, der sich um eine systematische Darstellung der erzielten mathematischen Resultate bemühte. Wir wissen z.B., dass *Hippokrates von Chios* bereits mehr als 100 Jahre vorher ein um Systematik bemühtes mathematisches Lehrbuch schrieb. Allerdings wissen wir vom Inhalt derartiger *voreuklidischer* Texte zur Systematik der Mathematik so gut wie nichts.

Verehren wir in Euklid vielleicht den falschen Mann? Hat er weniger das Verdienst, einer neuen Strenge zum Durchbruch verholfen zu haben, als vielmehr nur das Glück, dass seine Werke überliefert wurden und nicht verloren gingen?

Ein gewisses Risiko für diesen Irrtum besteht zwar, aber wir wissen aus antiken Quellen, dass Euklids *Elemente* schon als Standardwerk geschätzt und verehrt wurden, als die Texte der anderen Autoren noch verfügbar waren. Es spricht also einiges dafür, dass Euklid auf dem Weg zur Axiomatisierung tatsächlich einen kräftigen Schritt nach vorne tat. Wie groß er nun aber genau war, wird sich nur noch schwerlich bestimmen lassen.

Abseits dieser Frage waren es eben einfach die *Elemente* Euklids, durch die das antike Konzept der axiomatischen Mathematik bis in die Moderne überliefert wurde. Selbst wenn wir Euklid ein bisschen zu viel verehren und er keinerlei besonderes Verdienst bei der Entwicklung des axiomatischen Denkens gehabt haben sollte, dann bleibt doch, dass es eben seine *Elemente* waren, die über 2000 Jahre hinweg immer wieder neue Generationen von Mathematikern für diese Strenge der Mathematik begeisterten. Der Punkt der immensen ideengeschichtlichen Bedeutung des Buchs ist insofern von der Frage der besonderen Leistungen seines Autors unabhängig.

9 Das meint: Wenn man in der euklidischen Geometrie das Parallelenaxiom gegen ein Axiom austauscht, das fordert das die Winkelsumme in Dreiecken stets 180° beträgt, so erhält man ein logisch gleichwertiges System. Alles was vorher beweisbar war, ist auch danach noch beweisbar.

10 Es kann aber auch Thales von Milet oder erst ein späterer Pythagoreer gewesen sein. Wir wissen das leider nicht zuverlässig. Siehe hierzu auch: *Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid* unter www.antike-griechische.de/Pythagoras.pdf

Der Aufbau der *Elemente*

Euklids *Elemente* gliedern sich in 13 Bücher (Kapitel). Zeitweise waren Versionen der *Elemente* mit 15 Büchern im Umlauf. Die Bücher 14 und 15 werden aber heute übereinstimmend als nicht authentisch und als spätere Hinzufügungen eingeschätzt.

Thematisch umfassen die *Elemente* die Gebiete

Planimetrie (Theorie der Ebene sowie ebener Figuren),

Stereometrie (Theorie des 3-dimensionalen Raums sowie körperlicher Figuren),

Arithmetik (Theorie der Zahlen)

und die heute nicht mehr besonders aktuelle Proportionenlehre (Proportionenlehre des Eudoxos).

Das hohe Ansehen verdienen sich die *Elemente* vor allen Dingen durch ihre Planimetrie. Hier wird das Konzept einer axiomatisch aufgebauten und streng beweisenden Mathematik besonders überzeugend vorgestellt. Euklid formuliert kein Programm oder Grundsätze, sondern liefert einfach ein beeindruckendes und faszinierendes Beispiel dafür, wie stringent und exakt Mathematik sein kann.

Ein gleichwertiger Ansatz zum axiomatischen Aufbau von Arithmetik und Stereometrie fehlt in den *Elementen*. Die stereometrischen Bücher vermitteln jedoch einen guten Eindruck vom Stand der Stereometrie zu Euklids Zeiten. Die arithmetischen Bücher beschränken sich auf die Theorie natürlicher Zahlen. Da eine Beschäftigung mit Bruchzahlen dort konsequent vermieden wird, vermitteln sie keinen wirklich umfassenden Eindruck vom Stand der damaligen Arithmetik. Allerdings liefern sie einen wunderschön einfachen Beweis für die Existenz *unendlich* vieler Primzahlen.

Die Proportionenlehre ist der abstrakteste Teil der *Elemente*. Sie liefert einen Einblick in die Tiefe des Denkens antiker Mathematiker. Vor das Problem gestellt, dass die antike Arithmetik nicht ausdrucksstark genug war, um alle in der Geometrie konstruierbaren Größenverhältnisse beschreiben zu können, ersann Eudoxos die in den *Elementen* referierte Proportionenlehre. Sie soll Größenverhältnisse (Proportionen) auch dort noch beschreibbar machen, wo die (antike) Arithmetik versagt.[11]

Das hier präsentierte äußerst knappe Exzerpt der *Elemente* unterschlägt den beeindruckendsten Teil der *Elemente*, nämlich die Stringenz des von Beweis zu Beweis voranschreitenden systematischen Aufbaus der Mathematik (insbesondere der Planimetrie). Auf die Wiedergabe der Beweise wird (fast) ausnahmslos verzichtet. Die *Strahlkraft* der Idee, dass in den Beweisen außer Axiomen[12] *nichts* vorausgesetzt werden darf, was nicht bereits vorher bewiesen wurde, wird deswegen hier nicht recht deutlich.

11 Eudoxos hat diese Theorie entwickelt um auch dann noch Größenverhältnisse (Proportionen) betrachten zu können, wenn diese sich nicht durch Quotienten natürlicher Zahlen (positive Bruchzahlen) beschreiben lassen. Heute verwenden wir in solchen Fällen *irrationale* Zahlen (z.B. **π** für das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser). *Irrationale* Zahlen sind reelle Zahlen, die sich *nicht* als der Quotient aus einer natürlichen und einer ganzen Zahl darstellen lassen. *Irrationale* Zahlen haben eine niemals endende, niemals periodisch werdende Dezimalbruchentwicklung und waren in der Antike *unbekannt*. Manchmal zu lesende Formulierungen wie, dass schon dieser oder jener antike Mathematiker bewiesen hätte, dass diese oder jene Größe eine *irrationale* **Zahl** sei, sind etwas ungenau. Was jeweils bewiesen wurde ist, dass etwas *nicht* mittels rationaler Zahlen ausgedrückt werden kann (Beweis der *Irrationalität*). Ein Konzept *irrationaler* **Zahlen** aber gab es in der Antike *nicht*. Zur Umgehung genau dieser Lücke schuf ja Eudoxos die Proportionenlehre.

12 Genauer: nichts außer Axiomen und Postulaten (Euklid macht da einen heute nicht mehr gebräuchlichen Unterschied).

Die *Elemente* waren aber gerade deswegen so einflussreich, weil sie die Durchführbarkeit eines derart anspruchsvollen Projekts durch ihr Beispiel aufs nachdrücklichste bewarben.

Generation um Generation von Mathematikern wurde vor allem durch die *Elemente* für die Strenge der Mathematik gewonnen. Für viele später berühmt gewordene Mathematiker war die Lektüre der *Elemente* ein Offenbarungserlebnis. Etliche von ihnen haben mehr oder minder beredt beschrieben, wie sie als Jüngling nach der Lektüre der ersten paar Seiten der *Elemente* plötzlich wussten, dass für sie nur ein Leben in Frage kam, das sich ganz der Strenge mathematischen Denkens widmet.

Die *Faszination* einer Verstandeskultur, in der es kein *einerseits – andererseits*, kein *ich meine – du meinst*, kein *ich glaube – du glaubst* gibt, sondern in der nur zählt, was mit Strenge aus den Axiomen heraus bewiesen wurde, kann hier *nicht* erfahren werden. Es handelt sich bei diesem Papier eher um eine Art bildungsbürgerliches Kürzest-Brevier. Es wird ein Eindruck davon vermittelt, wie sich die *Elemente* thematisch gliedern und das Spektrum der dort bewiesenen Behauptungen wird durch einige (beweisfrei) vorgestellte Beispiele beleuchtet. Mehr nicht!

Dabei wird *keinesfalls* eine auch nur annähernd vollständige Auflistung der in den *Elementen* vorgetragenen Resultate angestrebt. Die 13 Bücher (Kapitel) der *Elemente* enthalten schließlich mehr als 450 Sätze! Pro Buch werden nur wenige, möglichst repräsentative Sätze ausgewählt.

Dem an sich etwas vermessenen Projekt eines Kürzest-Breviers zu den *Elementen* kommt dabei entgegen, dass trotz der akademischen Strenge der *Elemente*, die dort behandelten Themen meist dem heutigen Mittelstufenstoff entstammen. Allerdings eben mit dem gravierenden Unterschied, dass sich Euklid, besonders in der Planimetrie, um einen axiomatischen, streng beweisend vorgehenden Aufbau der Mathematik bemüht. Da die Beweise aber sowieso unterschlagen werden, kann die Nähe zum Mittelstufenstoff hier hemmungslos ausgebeutet werden.

Bei der Wiedergabe der Sätze aus den *Elementen* wird nicht nach Authentizität der Formulierung gestrebt. Wo immer es mir für die Zugänglichkeit und ein leichteres Verständnis hilfreich erschien, habe ich die Resultate in moderner Sprechweise reformuliert. Bei der Angabe von Satznummern oder den sehr gelegentlich eingestreuten Zitaten aus den *Elementen* stütze ich mich durchgängig auf den Nachdruck der *Ostwalds Klassiker* Ausgabe der *Elemente*[13]. Zitate aus den *Elementen* sind **blau** gesetzt.

Wer den euklidischen Beweisen aus den *Elementen* einen Schritt näher treten will, ohne gleich die *Elemente* selbst studieren zu wollen, dem sei *Benno Artmann: Euclid – The Creation of Mathematics* empfohlen.[14] Dieses Papier hat im Übrigen viel von Artmanns Buch profitiert.

Ich werde nicht einfach einen Satz nach dem anderen aus Euklids *Elementen* aneinander reihen, sondern ich versuche, an vielen Stellen dem Leser ein Gefühl dafür zu vermitteln, welche Strategie Euklid verfolgt und welche Probleme ihn umtreiben. Solche Interpretationen sind natürlich immer auch ein gutes Stück Spekulation und können nicht mit der gleichen Strenge wie die Sätze der *Elemente* bewiesen werden.

In der Euklid Literatur existieren zur ein oder anderen Frage durchaus konkurrierende Sichtweisen. In einem Einführungspapier erscheint es mir aber nicht sinnvoll, gleich tief in die Debatten zur Euklid Interpretation einzusteigen. Deswegen unterschlage ich hie und

13 Euklid: Die Elemente. Bücher I-XIII. Hrsg. u. übs. v. Clemens Thaer. Frankfurt a.M.: Harri Deutsch, 3. Aufl. 1997.
14 Benno Artmann: Euclid - The Creation of Mathematics. New York, Berlin, Heidelberg: Springer 1999. Dieses Buch sei zudem jedem empfohlen, der eine gute Bibliografie zum Thema Euklid sucht.

da abweichende Interpretationen. Der Leser sei also vorgewarnt: Dieser Text will eine gut lesbare Einführung zu Euklids *Elementen* sein, stellt aber kein autoritatives Referenzwerk dar.

Bevor nun der Inhalt der *Elemente* skizziert wird, als letzte Vorbereitung noch eine tabellarische Übersicht zur Gliederung der *Elemente*:

Buch	Gebiet	Schwerpunkt	prominente Resultate
I	Geometrie / Planimetrie	Grundlegende Sätze und Konstruktionen	Satz des Pythagoras
II	Geometrie / Planimetrie	„Geometrische Algebra“	Verallgemeinerter Satz des Pythagoras; Quadratur geradlinig begrenzter Figuren
III	Geometrie / Planimetrie	Kreislehre, Sehne, Tangente	Satz des Thales
IV	Geometrie / Planimetrie	In- u. Umkreis; regelmäßige Vielecke	Konstruktion des regelmäßigen Fünf-Ecks
V	Proportionen-lehre	Mathematische Behandlung der Proportionen beliebiger Größen	
VI	Geometrie / Planimetrie	Ähnliche Figuren	Konstruktion ähnlicher Figuren mit vorgegebener Fläche
VII	Arithmetik / Zahlentheorie	Größter gemeinsamer Teiler; kleinstes gemeinsames Vielfaches	Euklid Algorithmus
VIII / IX	Arithmetik / Zahlentheorie	Geometrische Proportion (a : b = b : c)	Nachweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen
X	Geometrie	Inkommensurabilität	Im Quadrat sind Basis und Diagonale inkommensurabel
XI	Geometrie / Stereometrie	Parallelflache, Prisma	Das Volumen ähnlicher Parallelflacher steigt mit der 3. Potenz der Seitenlänge
XII	Geometrie / Stereometrie	Pyramide, Prisma, Kegel, Zylinder, Kugel	Volumen des Kegels = 1/3 des umschreibenden Zylinders
XIII	Geometrie	Goldener Schnitt / platonische Körper	Die Seiten im Pentagramm teilen sich im Verhältnis des goldenen Schnitts; Es gibt nur fünf platonische Körper

Tabelle 1: Gliederungsschema der Elemente

Buch I – Anfänge der Planimetrie

Die *Elemente* sind kein Werk, das sich in epischer Breite ergeht oder sich mit lyrischen Ausschmückungen aufhält. Es gibt nicht einmal einleitende Bemerkungen über Zielsetzung oder Motivation des Textes.

Euklids *Elemente* beginnen mit dem Wort: *Definitionen*

Es folgt der erste Satz aus Euklids *Elementen*:

> Ein ***Punkt*** ist, was keine Teile hat,
>
> eine ***Linie*** breitenlose Länge.

Obwohl dies unter der Überschrift *Definitionen* steht, handelt es sich hierbei natürlich *nicht* um Definitionen im modernen Sinne. Der Satz gibt vielmehr an, in welcher Richtung man idealisieren muss, um, ausgehend von den alltäglichen Begriffen *Punkt* und *Linie*, zu den gemeinten *idealen* Objekten *Punkt* und *Linie* zu gelangen. Über die Frage der Existenz derart idealer Objekte verliert Euklid kein Wort. Als Anhänger der platonischen Lehre ist für ihn die Existenz idealer Objekte selbstverständlich. Und ebenso selbstverständlich ist für ihn, dass die Mathematik sich nur mit derartigen idealen Objekten zu beschäftigen hat.

Nach den insgesamt 17 einleitenden Definitionen folgen die *Postulate* und *Axiome*. Die Unterscheidung zwischen *Postulaten* und *Axiomen* knüpft an die Methodologie des *Aristoteles* an. Beide, sowohl *Postulate* wie *Axiome*, werden bei den Beweisen als gültig vorausgesetzt. Der Unterschied besteht darin, dass *Axiome* als sicher und nicht sinnvoll anzweifelbar gelten.[15] Die *Postulate* hingegen werden zwar als höchst plausibel eingestuft, gelten aber nicht in gleicher Weise als über jeden Zweifel erhaben.

> Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich

ist z.B. das 1. *Axiom* der *Elemente*. Das so berühmte *Parallelenaxiom* ordnet Euklid vorsichtiger Weise unter die *Postulate* ein (Postulat 5).[16]

Nach Aufzählung der Postulate und Axiome beginnt Euklid - ohne auch nur einen einzigen überleitenden Satz einzuschieben - mit der Formulierung der ersten mathematischen Sätze und deren Beweis. Der hier praktizierte Stil *Definition, Satz, Beweis* ist in der Mathematik klassisch geworden.

Euklid ist im Buch I zunächst wesentlich damit beschäftigt, sich die notwendigen Grundlagen für die Beweise anspruchsvollerer Sätze zu beschaffen. Er zeigt, dass sich mit den benannten Axiomen und Postulaten die *Durchführbarkeit* ganz elementarer geometrischer Konstruktionen – wie z.B. die Halbierung einer Strecke oder eines Winkels – sichern lässt. Und er beweist einige einfache Sätze zu Dreiecken: Der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck oder Sätze zur Kongruenz von Dreiecken (Beispiel: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und in dem von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent).

Wenn zur Verfolgung der Formulierungen des Beweises hilfreich, setzt Euklid Skizzen ein, die den Beweisgang illustrieren. Sie sind jedoch nur didaktisches Hilfsmittel. Der Beweis kommt streng genommen jeweils ohne sie aus. Auch dies hat stilbildend gewirkt. Die Skizze gilt in der Mathematik bis heute nur als Zugeständnis an die Schwerfälligkeit des menschlichen Verstandes. Sie soll das Verfolgen des Beweis führenden Arguments

---

15 s. hierzu auch: *Aristoteles: Logik und Methodik in der Antike* (www.antike-griechische.de/Aristoteles.pdf)

16 Da die Unterscheidung zwischen Postulaten und Axiomen in der modernen Mathematik keine Rolle mehr spielt, ist die kleine Ungenauigkeit, die in der Bezeichnung *Euklids Parallelenaxiom* liegt, verzeihlich.

erleichtern oder zur Erfassung der Beweisstrategie inspirieren, ist jedoch kein Teil des Beweises.

Euklid beweist im ersten Buch auch etliche grundlegende Sätze zu Winkeln. Es werden Scheitel- und Wechselwinkel behandelt (Satz 15 u. 29, Buch I, s. Abb. 1). Und es wird gezeigt, dass die Winkelsumme im Dreieck stets 2 rechten Winkeln (180°) gleich ist (Satz 32, Buch I).

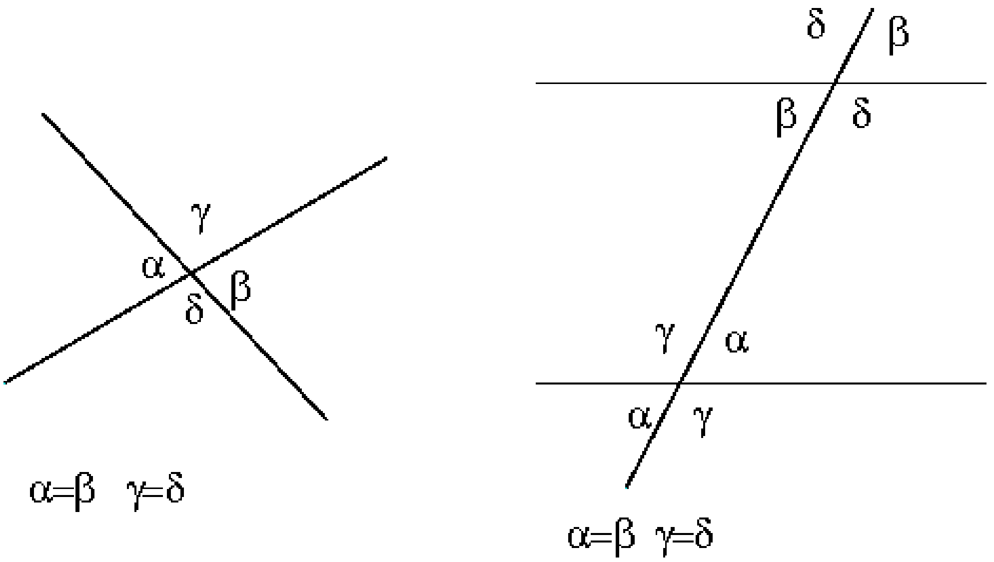


Abbildung 1: Scheitel- und Wechselwinkel

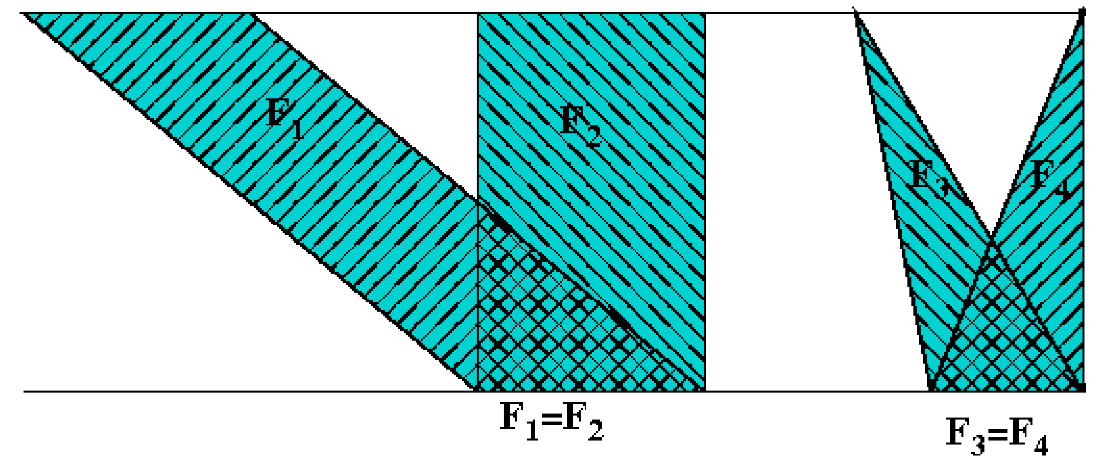


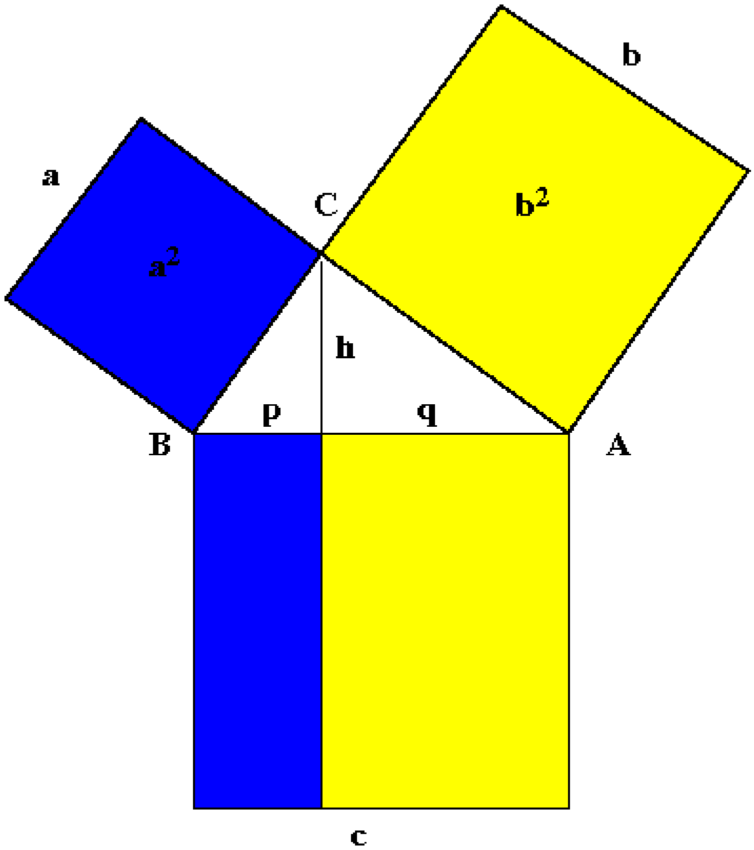
Abbildung 2: Parallelogramme und Dreiecke zwischen zwei Parallelen

Danach betrachtet er Parallelogramme und Dreiecke, die zwischen zwei Parallelen aufgespannt werden (s. Abb. 2).

Sofern die zwischen zwei Parallelen aufgespannten Parallelogramme bzw. Dreiecke über der gleichen Basis errichtet werden, sind sie flächengleich (Satz 36 u. 38, Buch I).

Zum Schluss von Buch I wendet sich Euklid dem Satz des Pythagoras zu. Er beweist ihn unter Verwendung des so genannten Euklidschen Lehrsatzes oder auch Kathetensatzes (s. Abb. 3, nächste Seite).

Dieser Euklidsche Lehrsatz taucht in den *Elementen* nur als Hilfssatz beim Beweis des Satzes von Pythagoras auf. Er besitzt noch nicht einmal eine eigenständige Satznummer.



Euklidscher Lehrsatz (Kathetensatz): Im rechtwinkligen Dreieck gilt:
a^2=pc und b^2=qc
Der Satz des Pythagoras ($a^2+b^2=c^2$) folgt hieraus unmittelbar.

Abbildung 3: Euklids Hilfssatz auf dem Weg zum Beweis des Satzes von Pythagoras

Nach dem Beweis des Satzes von Pythagoras (Satz 47, Buch I) folgt noch der Beweis von dessen *Umkehrung*. Der Satz von Pythagoras besagt: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. Die *Umkehrung* des Satzes von Pythagoras besagt: gilt $a^2 + b^2= c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig. Diese Umkehrung beweist Euklid als 48. und letzten Satz von Buch I.

Der Text von Buch I enthält keine einzige Wiederholung. Nichts wird dem Leser an späterer Stelle nochmals in Erinnerung gerufen,[17] nichts mit anderen Formulierungen ein zweites Mal erläutert. *Definition*, *Satz*, *Beweis* – Punktum. Mehr ist zur Sicherung mathematischer Strenge nicht notwendig, weniger nicht möglich. Durch diesen stilistischen Purismus war es trotz der über 2000jährigen, teils komplizierten Überlieferungsgeschichte häufig möglich Hinzufügungen von Kopisten und Übersetzern als nicht authentisch zu identifizieren. Zusätzliche Erläuterungen, motivierende Vorbemerkungen, Einschübe ohne klaren mathematischen Gehalt: All das konnte beruhigt als spätere Verfälschung gestrichen werden.

Der besonders strenge Stil charakterisiert die *Elemente* vom ersten bis zum letzten Satz.[18]

17 Allerdings rechtfertigen die späteren Beweise manche Beweisschritte durch Verweis auf bereits früher Bewiesenes. Dann wird die jeweils einschlägige Satznummer mitgeteilt. Knapper geht es kaum.

18 Es gibt jedoch hinsichtlich der *systematischen Ordnung* des Stoffs gewisse *Mängel*. Euklid scheint mehrfach Teile aus älteren Arbeiten anderer Autoren kaum bearbeitet übernommen zu haben. Dadurch kommt es dann dazu, dass manche Fragen, die man gut zusammenhängend hätte diskutieren können, an ganz verschiedenen Stellen der Elemente abgehandelt werden.

Buch II – geometrische Algebra

Buch II der *Elemente* beschäftigt sich mit geradlinig begrenzten Figuren wie Dreieck, Parallelogramm, Rechteck und Quadrat. Viele der dort formulierten Sätze erinnern an Sachverhalte aus der Algebra. Und in der Tat hat sich zur Charakterisierung des Inhalts von Buch II der Begriff *geometrische Algebra* durchgesetzt.

Ein Beispiel kann eine erste ungefähre Vorstellung von Euklids *geometrischer Algebra* vermitteln. Man kennt aus der Schulmathematik die 1. binomische Formel:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Bei Euklid wird dieser Zusammenhang an Hand eines Quadrates mit der Basis c = (a + b) behandelt (Satz 4, Buch II). Betrachtet man die Fläche eines solchen Quadrates, kann man auf rein geometrischem Wege zur 1. binomischen Formel gelangen (vgl. Abb. 4).

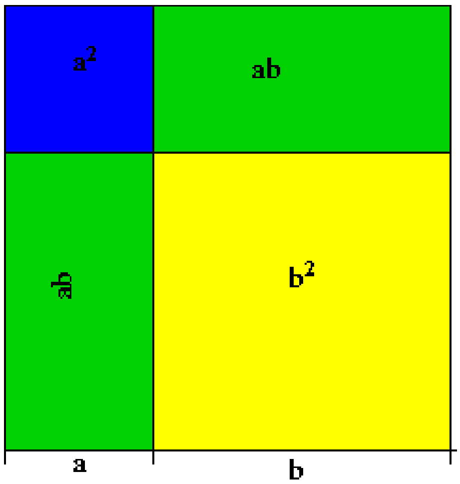


Abbildung 4: Die 1. binomische Formel in geometrischer Deutung (Satz 4, Buch II)

Euklid bleibt aber nicht bei derart einfachen Beispielen stehen. In Satz 11, Buch II zeigt er, wie man rein geometrisch die quadratische Gleichung $\mathbf{a(a - x) = x^2}$ löst.[19] Im Anschluss beweist Euklid den *verallgemeinerten Satz des Pythagoras* (*Cosinus-Satz*) für *nicht rechtwinklige* Dreiecke (Satz 12 u. 13, Buch II).

Modern fasst man die verschiedenen Sätze rund um den klassischen Pythagoras Satz mittels der cosinus Funktion in einem einzigen Satz (dem *Cosinus-Satz*) zusammen:

Seien die drei Seiten eines *beliebigen* Dreiecks beliebig mit a, b, c bezeichnet und sei γ der der Seite c gegenüberliegende Winkel, so gilt: [20]

$$\mathbf{a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot \cos\gamma = c^2}$$

Die zentrale Fragestellung von Buch II ist die Bestimmung der Fläche geradlinig begrenzter, ebener Figuren. Diesem Zweck dient auch die *geometrische Algebra*. Euklid interessiert sich für Regeln, nach denen man den einen Ausdruck für eine *Größe* durch einen anderen Ausdruck für dieselbe *Größe* ersetzen kann. So etwas zählen wir heute für gewöhnlich zur Algebra (s. 1. binomische Formel). *Geometrisch* ist Euklids Algebra *einerseits*, weil es sich bei seinen Größen speziell um Flächen geometrischer Figuren handelt. (Schließlich sucht er Möglichkeiten die Größe der Flächen von allen Arten von geradlinig begrenzten, ebenen Figuren möglichst einfach und elegant zu charakterisieren.) *Anderseits* ist seine Algebra aber auch geometrisch, weil die Methoden, mit denen er die Gültigkeit der Regeln beweist, geometrisch sind.

Für Euklid ist die Diskussion der Fläche (des Flächeninhalts) einer Figur erst dann befriedigend abgeschlossen, wenn man ein Verfahren angeben kann, das beschreibt, wie man zu einer gegebenen Figur ein (beweisbar) flächengleiches Quadrat konstruieren kann.

---

19 Diese Gleichung steht in enger Beziehung zum Thema *Goldener Schnitt*.

20 Ganz genau genommen hat Euklid ein kleines bisschen weniger bewiesen, als die moderne Formulierung ausdrückt. Man muss aber nur eine Ungeschicklichkeit bei der Formulierung von Satz 13, Buch II ändern und schon ist auch dieses Problem beseitigt. Die Ungeschicklichkeit bei der Formulierung von Satz 13, Buch II ist bereits früh aufgefallen. Es gibt ein altes Scholion (Randbemerkung eines Kopisten), das darauf hinweist.

Die heute typischen Formeln zur Flächenberechnung für die verschiedenen Grundfiguren wie Dreieck, Parallelogramm, Rechteck, etc. findet man übrigens bei Euklid so nicht. Resultate der Geometrie mittels Formeln auszudrücken wurde in der *akademischen* Mathematik erst deutlich später üblich.

Wir sind gewohnt, die Fläche als ein Vielfaches eines Einheitsquadrats (im Alltag: mm^2, cm^2, m^2, km^2 etc.) auszudrücken. In den Augen der antiken Griechen war dieser Zugang in einer strengen Geometrie gar nicht immer möglich. Zumindest in einer auf äußerste Strenge zielenden mathematischen Abhandlung stellte sich das Problem, dass es eben passieren kann, dass sich die Größenverhältnisse zwischen einer gegebenen Figur und einem Einheitsquadrat nicht mittels *rationaler* Zahlen ausdrücken lassen. Da die antiken Griechen aber *keine irrationalen* Zahlen kannten, jedoch sehr wohl wussten, dass *nicht* alle geometrischen Proportionen mit *rationalen* Zahlen beschreibbar sind, war für sie ein solcher Ansatz zur Charakterisierung von Flächen in der *akademischen* Mathematik problematisch und höchsten für Spezialfälle, nicht aber allgemein tauglich.

Die von Euklid benutzte Strategie zu gegebenen Figuren flächengleiche Quadrate zu erzeugen, umgeht das Problemfeld der irrationalen Zahlen.

Das Buch II endet mit dem Beweis, dass sich zu *jeder* geradlinig begrenzten, ebenen Figur ein flächengleiches Quadrat konstruieren lässt (Satz 14, Buch II). Das Verfahren zur Erzeugung flächengleicher Quadrate zerfällt in zwei Hauptschritte:

(i) Erzeuge zur gegebenen geradlinigen Figur ein flächengleiches Rechteck;
(ii) Erzeuge aus dem Rechteck ein flächengleiches Quadrat.

Dass und wie (i) möglich ist, klären verschiedene Sätze aus Buch I und II. Die Vorgehensweise bei Schritt (ii) soll kurz skizziert werden. Es wird nur das Verfahren und nicht der zugehörige Beweis referiert.

Gegeben sei ein beliebiges Rechteck mit den Seiten **a** und **b**. Gesucht wird die Seite **c**, so dass das Quadrat über **c** flächengleich zum gegebenen Rechteck ist.

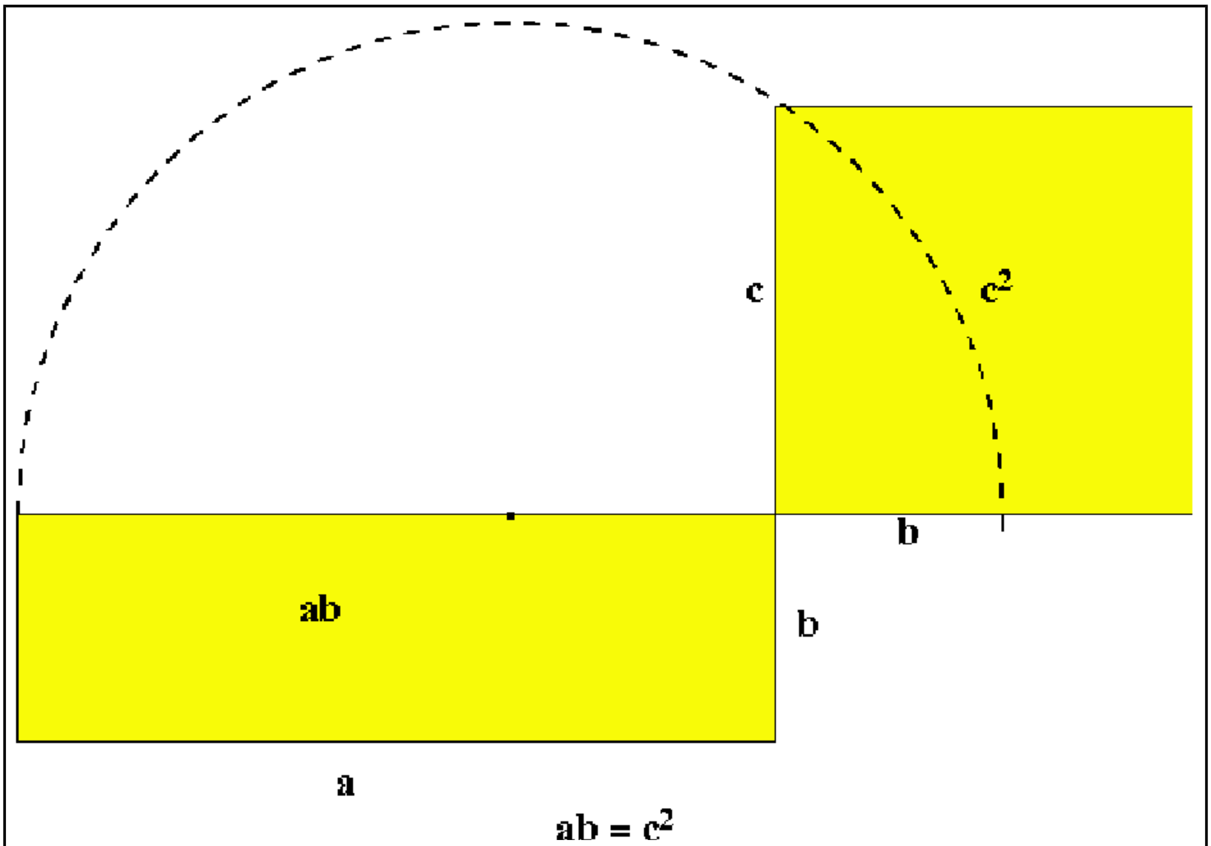


Abbildung 5: Konstruktion eines flächengleichen Quadrates zu einem gegebenen Rechteck

Hat man ein Rechteck mit den Seiten *a* und *b*, so verlängert man die Strecke *a* um die Strecke *b*. Man bestimmt den Mittelpunkt dieser neuen Strecke (a + b) und schlägt einen Halbkreis mit dem Radius (a+b)/2 über der Strecke. Sodann errichtet man das Lot über dem Ansatzpunkt der Verlängerung (um *b*) bis der Halbkreis erreicht wird. Die so gewonnene Strecke *c* ist die Basis eines flächengleichen Quadrats.(vgl. Abb. 5)

Mit dem Nachweis der Möglichkeit, dass man zu jeder geradlinig begrenzten Figur ein flächengleiches Quadrat erzeugen kann, ist für Euklid die Behandlung der Flächen derartiger Figuren abgeschlossen. Damit ist für ihn alles, was von theoretischem Interesse sein könnte, geklärt. Und über das Theoretische hinausgehende, anwendungsbezogene Fragen interessieren ihn (zumindest in den *Elementen*) nicht.

Nachbemerkung zu den Voraussetzungen derartiger Konstruktionen:

Zur Sicherung der Durchführbarkeit solcher Konstruktionen hat Euklid seine *Postulate* (Axiome) formuliert.

Hat man ein Rechteck von der Größe der USA wird das obige Verfahren zwar praktisch scheitern, aber das interessiert Euklid nicht. Er hat in seinen Postulaten schließlich gefordert, dass man

> von jedem Punkt zu jedem Punkt die Strecke ziehen kann (Postulat 1);
>
> jede Strecke beliebig verlängern kann (Postulat 2);
>
> um jeden Punkt einen Kreis mit beliebigem Radius schlagen kann (Postulat 3).

Euklid beschäftigt sich eben mit der Theorie idealer Objekte und nicht mit den Tücken der wirklichen Welt. Das Postulat 3 einerseits, sowie die Postulate 1 und 2 anderseits repräsentieren die beiden klassisch gewordenen Werkzeuge der euklidischen Konstruktionen: *Zirkel* und *Lineal*. Wortwörtlich kommen *Zirkel* und *Lineal* in Euklids *Elementen* allerdings nirgends vor. Es sind nur Metaphern (oder Metonymien) für die drei ersten euklidischen Postulate.[21]

Die beiden weiteren Postulate 4 und 5 lassen sich nicht so schön verbildlichen.

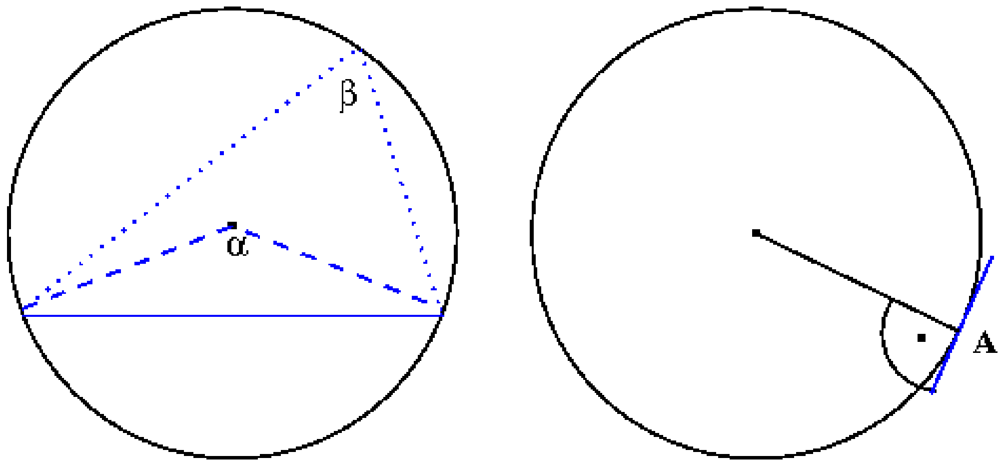
> Postulat 4 fordert, dass alle rechten Winkel einander gleich sind;
>
> Postulat 5 ist das berühmte Parallelenaxiom. Euklid hat ihm folgende Gestalt gegeben: Es soll gefordert sein,
>
> dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

21 Wenn im Umfeld der euklidischen Konstruktionen vom *Lineal* die Rede ist, muss man übrigens immer an ein markierungsfreies Lineal denken. Es geht ja nur darum, Punkte zu verbinden und Strecken zu verlängern. Die Idee, dass man sich bei geometrischen Konstruktionen bewusst auf die beiden Werkzeuge Zirkel und Lineal beschränken sollte, geht höchstwahrscheinlich auf den Pythagoreer *Oinopides von Chios* zurück. (Siehe hierzu auch: *Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid* unter www.antike-griechische.de/Pythagoras.pdf)
Richtig populär wurde die Idee nur mit Zirkel und Lineal zu arbeiten weil *Platon* sie aufgriff. Siehe hierzu auch: *Platon – Mathematik, Ideenlehre und totalitäre Staatsutopien* unter http://www.antike-griechische.de/Platon.pdf

Buch III – Kreislehre

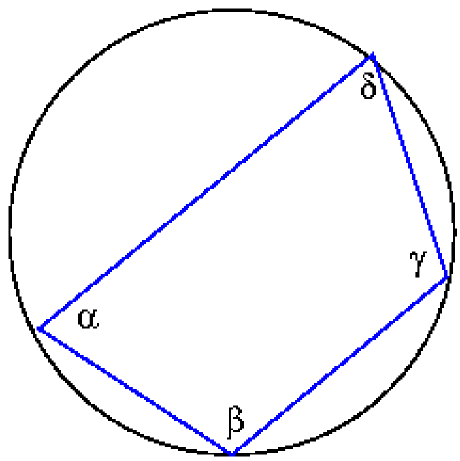
Buch III behandelt die Kreislehre. Das Thema Kreise wird allerdings auch nochmals kurz zu Beginn von Buch XII aufgenommen.[22] Euklid führt hier in Buch III vor allem die Konzepte Sehne und Tangente ein. Hierzu wird eine Vielzahl von Sätzen bewiesen. Darunter viele, die heute zum Mittelstufenstoff zählen. Zwei Beispiele können einen ersten Eindruck von den Themen in Buch III vermitteln:

Der Mittelpunktswinkel über einer Sehne ist stets doppelt so groß, wie ein beliebiger, über dieser Sehne errichteter Umfangswinkel (Satz 20, Buch III).



$\alpha = 2\beta$

Abbildung 6: Sehnen und Tangenten



$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Abbildung 7: Ein einem Kreis einbeschriebenes Viereck

Der Radius zu einem Punkt A steht immer senkrecht auf der Tangente am Punkt A (Satz 18, Buch III). Ein anderes Beispiel: In jedem einem Kreis einbeschriebenen Viereck addieren sich die einander gegenüber liegenden Winkel zu 180° (Satz 22, Buch III; s. Abb. 7).

Natürlich ist Buch III auch der richtige Platz, um den Satz von Thales zu beweisen. Ein über einem Kreisdurchmesser errichteter Umfangswinkel hat immer 90° (s. Abb. 8, nächste Seite). Bei Euklid hat der Satz von Thales die Nummer 31, Buch III.[23]

Richtig berühmt wurde das Buch III kurioser Weise nicht für seinen Inhalt, sondern dafür, was *fehlt*!

Das Buch II zeigt, wie man zu jeder geradlinig begrenzten, ebenen Figur ein flächengleiches Quadrat erzeugen kann. Es wäre also sehr schön, wenn man einen entsprechenden Satz auch für Kreise zur Verfügung hätte. Buch III wäre eindeutig der passende Ort für einen entsprechenden Satz.

22 Auch unter Einschluss von Buch XII bleibt bei Euklid die Substanz der Sätze zur Kreisgeometrie insgesamt bescheiden. Man sollte jedoch bedenken: Schlüssel unserer heutigen Theorie des Kreises ist die irrationale Zahl π. Die Irrationalität des Verhältnisses von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser (= π) wurde erst im 18. Jahrhundert bewiesen (Lambert). Eine mathematisch saubere Theorie irrationaler Zahlen (Dedekindsche Schnitte) ließ dann nochmals mehr als 100 Jahre auf sich warten.

23 Satz 31, Buch III drückt sogar noch mehr aus, der Satz von Thales ist nur ein Teil des Inhalts.

Nun, Euklid vergisst diesen Satz nicht versehentlich, auch wird er nicht später noch nachgereicht. Euklid wusste einfach nicht, wie man allein auf der Grundlage seiner Axiome und Postulate zu einem beliebigen Kreis ein flächengleiches Quadrat konstruiert. Er konnte es allerdings auch nicht wissen. Wie der deutsche Mathematiker Lindemann 1882 bewies, ist es im Rahmen der von Euklid gewählten Axiome (und Postulate) nicht möglich eine solche Konstruktion durchzuführen. Etwas suggestiver formuliert: *Allein* mit *Zirkel* und *Lineal* kann man zu einem Kreis *kein* flächengleiches Quadrat konstruieren.[24]

Zwischen der Veröffentlichung von Euklids *Elementen* und dem Beweis von *Lindemann* lagen mehr als 2000 Jahre. Und diese lange Zeitspanne war zugleich die Zeit eines vergeblichen Mühens der Mathematikergemeinde: Die vermeintliche Lücke in Euklids *Elementen* sollte geschlossen werden.[25] Das Problem der *Quadratur des Kreises* ist dadurch legendär geworden. Selbst Menschen, die sich nur mühsam ihrer Schulmathematik erinnern können, benutzen gern das Bild von der *Quadratur des Kreises.* Die Metapher von der *Quadratur des Kreises* steht auch heute noch für schwierigste bis unlösbare Probleme.

Es gibt übrigens, trotz des Beweises von Lindemann, noch immer Versuche von Amateur-Mathematikern das Problem einer *Quadratur des Kreises* allein mit Zirkel und Lineal zu lösen. Der ein oder andere scheint vom Beweis der Unmöglichkeit noch nichts gehört zu haben, oder traut halt dem Beweis schlichtweg nicht. Natürlich handelt es sich bei solchen Versuchen nur um Scheinbeweise, allerdings sind die Fehler manchmal sehr schwer zu finden.

In der Zeit vor Lindemann haben auch ernst zu nehmende Mathematiker Scheinbeweise für eine *Quadratur des Kreises* allein mit Zirkel und Lineal geliefert. Es war einfach ein sehr prominentes, klassisches Problem. Dessen Lösung versprach Ruhm und Ansehen. Da kann selbst bei Mathematikern der Wunsch zum Vater des Gedankens werden.[26]

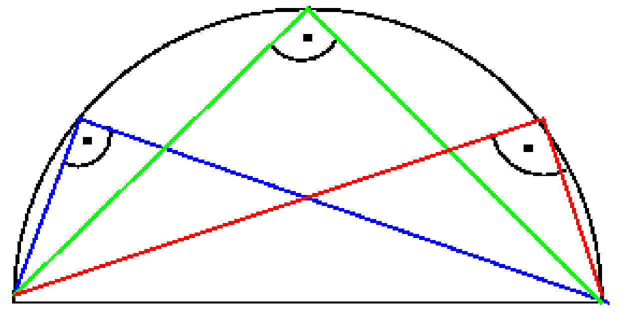


Abbildung 8: Der Satz von Thales: Die einem Halbkreis einbeschriebenen, über dem Kreisdurchmesser errichteten Dreiecke sind stets rechtwinklig

24 Wenn man auf die Anforderung, dass die Konstruktion *allein* mit Zirkel und Lineal erfolgen soll, *verzichtet*, dann ist eine Quadratur des Kreises sehr wohl möglich, und solche Lösungen waren in der Antike auch schon bekannt. (Siehe hierzu auch: *Pythagoras & Co. - Griechische Mathematik vor Euklid* unter www.antike-griechische.de/Pythagoras.pdf , insbesondere den Abschnitt *Deinostratos*: *Die Quadratur des Kreises mittels Quadratrix.*)

25 Genau genommen ist diese „Lücke“ sogar älter als die *Elemente*. Die Suche nach einer Möglichkeit zur Quadratur des Kreises *allein* mit Zirkel und Lineal begann schon vor dem Erscheinen der *Elemente*.

26 Zur Geschichte der „Quadratur des Kreises“ siehe auch: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html

Buch IV – regelmäßige Vielecke

Buch IV ist dem Thema In- und Umkreise, sowie der Konstruktion regelmäßiger Vielecke (regelmäßiger Polygone) gewidmet.

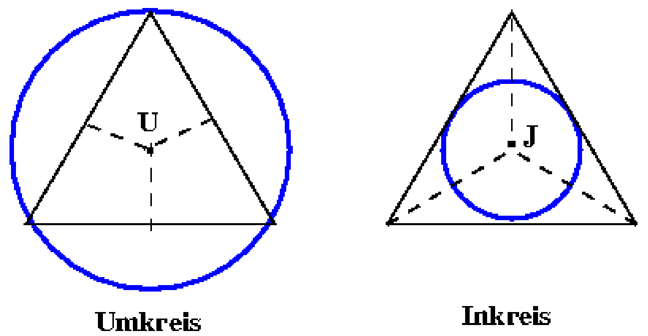


Abbildung 9: Um- und Inkreis beim Dreieck

Bei jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. Dieser Punkt U ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

Bei jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt. Dieser Punkt J ist der Mittelpunkt des Inkreises (vgl. Abb. 9)

In- und Umkreise lassen sich auch bei regelmäßigen Vielecken konstruieren. Dort sind die Mittelpunkte von Um- und Inkreis stets identisch (s. Abb 10).

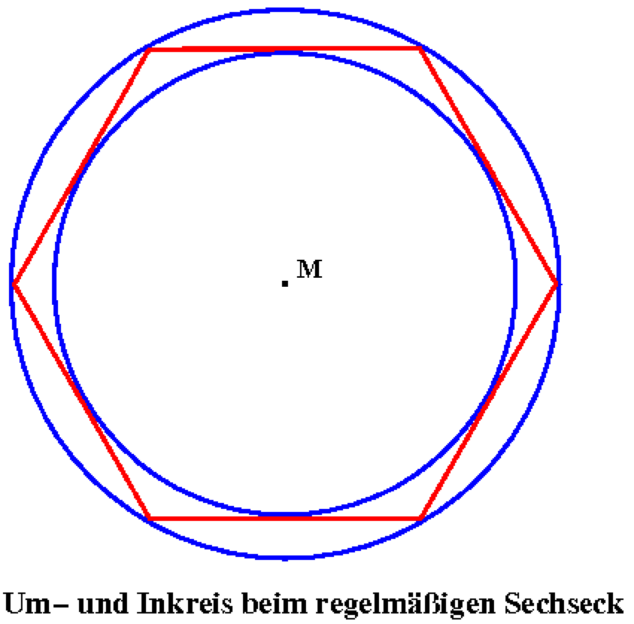


Abbildung 10: Regelmäßiges Sechseck mit Um- und Inkreis

Die Konstruktion von gleichseitigem Dreieck sowie Quadrat und regelmäßigem Sechseck ist trivial. Bei höheren Primzahlen wird aber die Konstruktion von zugehörigen regelmäßigen Vielecken schnell sehr anspruchsvoll.

Erst Archimedes konnte zeigen, wie man regelmäßige 7 Ecke konstruiert.

Das Problem der Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks wurde sogar erst von Gauß gelöst.

Euklid konnte neben den trivialen regelmäßigen Vielecken (Drei-, Vier-, Sechs-Eck), bereits das regelmäßige Fünf-Eck und alle regelmäßigen 2^n Ecke konstruieren (n>1). Hinzu kamen die *ableitbaren* Konstruktionen:

z.B. das regelmäßige 15-Eck, das sich durch Kombination der Konstruktionsmethoden für das regelmäßige 3- und 5-Eck erzeugen lässt (Satz16, letzter Satz des Buches IV).

Buch V – Proportionenlehre

Buch V ist der Proportionenlehre von Eudoxos gewidmet.[27] Sein Inhalt ist wesentlich abstrakter als der der vorherigen Bücher.

Die Proportionenlehre des Eudoxos ist eine Reaktion auf die Entdeckung *inkommensurabler* Größen durch die Pythagoreer. Weil $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, ist das Größenverhältnis zwischen Basis und Diagonale im Quadrat nicht durch eine *rationale* Zahl beschreibbar. Und damit ist das Größenverhältnis von Basis und Diagonale auch nicht durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen beschreibbar. Es gibt also auch keine Strecke, durch deren Vervielfältigung man *sowohl* Basis *wie* Diagonale erhalten kann. *Sie besitzen kein gemeinsames Maß*, so die antike Formulierung. Die Beschreibung ihrer Größenverhältnisse liegt jenseits des Horizonts rationaler bzw. natürlicher Zahlen.

Ein Konzept der *irrationalen* Zahlen hatten die antiken Griechen *nicht*. Das gab Anlass, eine Größenlehre unabhängig von der Arithmetik zu entwickeln. Wenn man nicht genau hinschaut, dann erscheinen die im Buch V bewiesenen Sätze alle trivial. Wir kennen sie alle aus der Arithmetik. Nur, es sind hier eben *keine* Sätze der *Arithmetik*! Es sind Sätze der *Proportionenlehre*, deren Konzepte *Größe* und *Proportion* allgemeiner anwendbar sind, als die den antiken Griechen verfügbare Arithmetik. ***Größe*** und ***Proportion*** (Verhältnis) sind hier eigenständige mathematische Grundbegriffe und stehen mit anderen mathematischen Grundbegriffen wie *Punkt*, *Strecke* oder *natürliche Zahl* auf einer Stufe.

Für natürliche Zahlen n, m und *beliebige* ***Größen*** a, b, c, d wird z.B. bewiesen:

$n(a + b) = na + nb$ und $(n + m)a = na + ma$

$n(ma) = (nm)a$

$a : b = c : d \Rightarrow (na) : (mb) = (nc) : (md)$

$n(a – b) = na – nb$ (für $a > b$) und $(n - m) a = na – mb$ (für $n > m$)

$a = b \Leftrightarrow a : c = b : c$ und $c = d \Leftrightarrow a : c = a : d$

$a > b \Leftrightarrow a : c > b : c$

Euklid nutzt die im Buch V entfaltete Proportionenlehre nur im folgenden Buch VI, welches der Ähnlichkeit geometrischer Figuren gewidmet ist. Ansonsten macht er von den Resultaten dieses Buchs V im weiteren Verlauf der *Elemente* keinen Gebrauch. Die Bedeutung der Proportionenlehre des Eudoxos für das antike Verständnis der Mathematik war aber so groß, dass Euklid sie wohl sowieso und unabhängig von jedweder Nützlichkeit für die Entfaltung des sonstigen Stoffs in aller Ausführlichkeit dargestellt hätte. Für moderne Leser ist der Zugang zu den Beweisen des Buches V allerdings etwas mühsam. Da die Mathematik mittlerweile die Hürde der Einführung irrationaler Zahlen genommen hat, fehlt uns heute auch ein wenig die innere Motivation, um uns dem deutlich abstraktesten Teil der *Elemente* mit der erforderlichen Energie und Konzentration zuzuwenden.

Die Platzierung der Proportionenlehre des Eudoxos unmittelbar vor der nachfolgenden Beschäftigung mit ähnlichen geometrischen Figuren ist stimmig. Ähnliche Figuren werden schließlich dadurch definiert, dass ihre Winkel *identisch* sind und ihre Seiten in *Proportion* stehen. Obwohl der Kurs, den Euklid beim Aufbau seiner *Elemente* einschlägt, hier sehr deutlich durch das Wissen um die Existenz *inkommensurabler* Größen bestimmt wird, hat er diesen Sachverhalt in seinen *Elementen* bis hierher in keiner Form diskutiert oder auch nur erwähnt. Behandelt wird das Thema erst in Buch X.

27 Eine Diskussion der Proportionenlehre mit algebraischen Methoden findet man in: http://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf. Zu den wichtigen Beiträgen von Eudoxos zur antiken Astronomie siehe: http://www.antike-griechische.de/Eudoxos.pdf

Buch VI – Ähnlichkeitslehre

Buch VI beschäftigt sich mit ähnlichen, ebenen Figuren.[28] Zum Schulstoff gehört normalerweise nur die Analyse ähnlicher Dreiecke. Euklid beschäftigt sich jedoch ganz allgemein mit ähnlichen Figuren. Sie müssen nur geradlinig begrenzt sein.

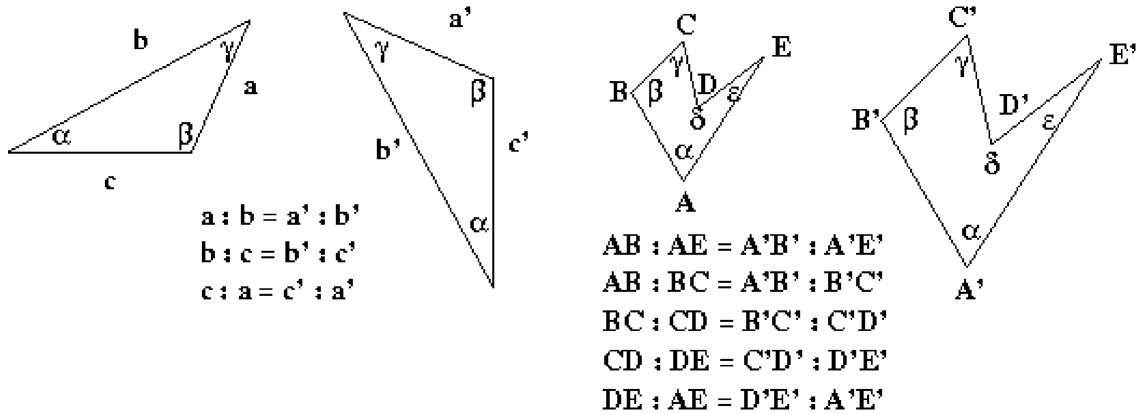


Abbildung 11: Ähnliche Drei- und Fünfecke

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen und gleiche Winkel umfassende Seiten *in Proportion* stehen, d.h. das gleiche Längenverhältnis aufweisen (s. Abb. 11).

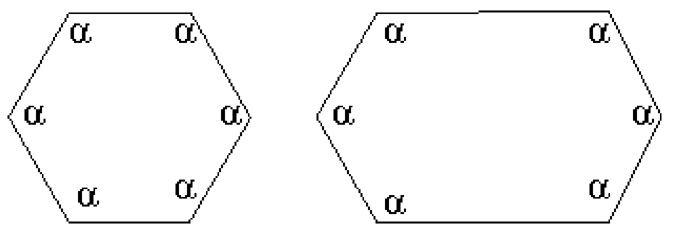


Abbildung 12: Zwei unähnliche Sechsecke mit identischen Winkeln

Zwei Dreiecke sind zwangsläufig ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Dass ihre Seiten in Proportion stehen, folgt allein schon aus der Gleichheit der Winkel. Im allgemeinen reicht es aber nicht aus, dass zwei Figuren in ihren Winkeln übereinstimmen, damit sie ähnlich sind (s. Abb. 12).

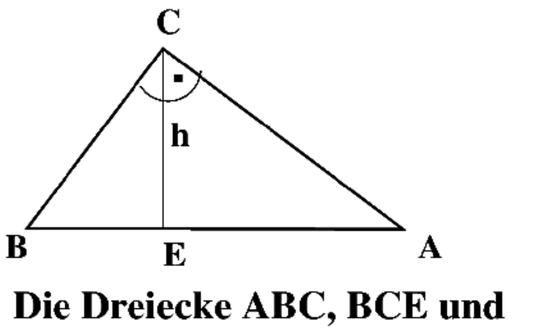


Abbildung 13: Teilung des rechtwinkligen Dreiecks in zwei ihm ähnliche Dreiecke

Sind zwei Dreiecke ähnlich (s. Abb. 11), so gilt für ihre Seitenlängen:

$a : a' = b : b' = c : c' = k$

k heißt dabei *Ähnlichkeitsfaktor*. Die Definition des Ähnlichkeitsfaktors lässt sich auch auf ähnliche Vier-, Fünf- Sechs-Ecke etc. erweitern.

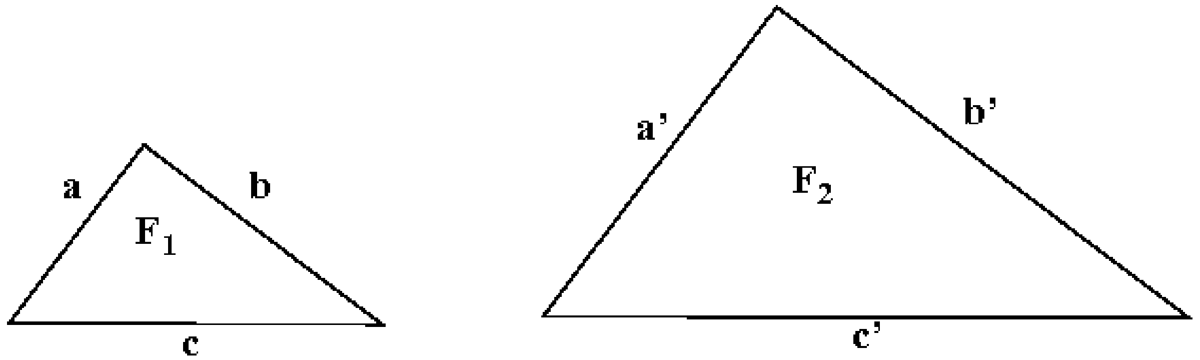
Bevor Euklid sich mit beliebigen geradlinig begrenzten Figuren beschäftigt, thematisiert er zunächst Dreiecke und Parallelogramme.

Errichtet man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe über der Hypotenuse, so sind die dadurch neu entstehenden Dreiecke dem Ausgangsdreieck ähnlich (Satz 8, Buch VI; s. Abb.13).

28 Der hierbei bei Euklid erfolgende Rückgriff auf die Proportionenlehre, wird bei der Wiedergabe der Sätze aus Buch VI ignoriert. Es wird von den modernen Möglichkeiten einer ausdrucksstarken Arithmetik Gebrauch gemacht.

Viele Sätze in Buch VI beschäftigen sich mit den Flächen ähnlicher Figuren. Hierbei kommt dem Ähnlichkeitsfaktor entscheidende Bedeutung zu.

In Satz 19, Buch VI zeigt Euklid, dass das Verhältnis zweier Flächen ähnlicher Dreiecke gleich dem Quadrat ihres Ähnlichkeitsfaktors ist (s. Abb. 14).



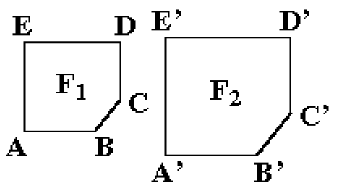
$$(a' : a)^2 F_1 = k^2 F_1 = F_2$$

Abbildung 14: Der Ähnlichkeitsfaktor k und Flächeninhalte bei ähnlichen Dreiecken

Euklid formuliert den oben veranschaulichten Satz 19, Buch VI wie folgt:

> Ähnliche Dreiecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten.

Im Satz 20, Buch VI verallgemeinert Euklid dieses Resultat für beliebige geradlinig begrenzte Figuren (s. Abb. 16).



$$A'B' : AB = k \qquad k^2 F_1 = F_2$$

Abbildung 16: Flächen ähnlicher Figuren am Beispiel von Fünfecken

In Satz 25, Buch VI beweist Euklid, dass man zu jeder geradlinig begrenzten Figur A und jedem Quadrat B eine Figur C konstruieren kann, die sowohl ähnlich zur Figur A, wie flächengleich zum Quadrat B ist (vgl. Abb. 15).

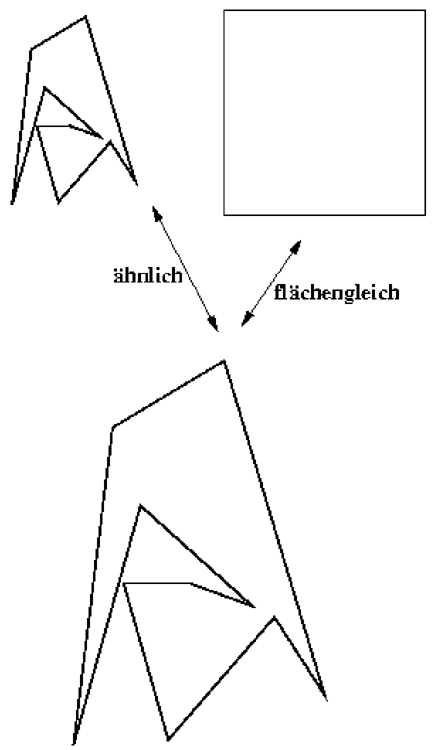


Abbildung 15: Konstruktion ähnlicher Figuren bei vorgegebener Fläche

Buch VII ist das erste von drei Büchern, die der Arithmetik, insbesondere der elementaren Zahlentheorie (der Theorie natürlicher Zahlen), gewidmet sind.

Der Übergang von der Planimetrie (der Geometrie der ebener Figuren) zur Arithmetik wird durch einen besonders langen Block von neuen Definitionen eingeleitet. Wie schon bei den grundlegenden Begriffsklärungen zur Geometrie im Buch I, sind auch hier unter der Überschrift Definitionen einige Einträge zu finden, die nach moderner Auffassung *keine* Definitionen sind. So versucht sich Euklid an einer Definition des Begriffs *Zahl*, was natürlich scheitert. Es werden aber auch gut funktionierende Definitionen eingeführt. Die von Euklid vorgetragenen Definitionen für Prim-, Quadrat-, Kubik- und vollkommene Zahl entsprechen den noch heute üblichen Definitionen. Nur der Sprachduktus erscheint halt etwas altertümlich (letzteres ist natürlich nicht besonders überraschend).[29]

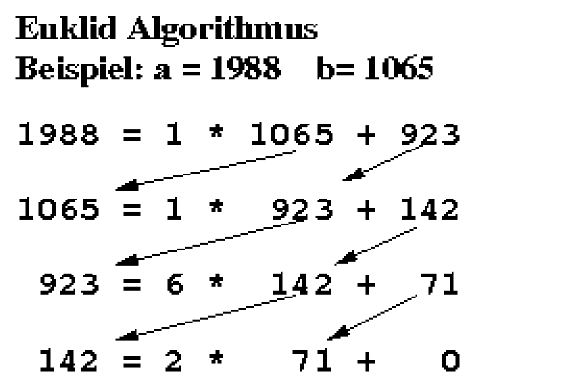


Abbildung 17: Bestimmung des ggT (71)

Das Buch VII beginnt mit dem Euklid Algorithmus zur Bestimmung des *größten gemeinsamen Teilers* (ggT) zweier Zahlen (Satz 2, Buch VII).

Soll der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen *a, b* (a,b > 0, a ≠ b) bestimmt werden, so teilt man die größere Zahl durch die kleinere und bestimmt den Rest. Dann teilt man die kleinere Zahl durch den Rest und bestimmt einen neuen Rest. Man fährt fort, indem man in der jeweils nächsten Zeile den Divisor der vorherigen Zeile zum Dividenden macht und den Rest der vorherigen Zeile als Divisor verwendet und anschließend den neuen Rest bestimmt. Wenn der Rest 0 ist, endet der Algorithmus. Der Divisor der letzten Zeile ist der gesuchte größte gemeinsamen Teiler (s. Abb. 17).

Ist der Divisor der letzten Zeile *1*, so haben die beiden Zahlen keinen gemeinsamen Teiler. Das hat Euklid mit dem vorangehenden Satz (Satz 1, Buch VII) gesichert.

In Satz 3 Buch VII wird gezeigt, wie man den *größten gemeinsamen Teiler* von 3 Zahlen bestimmen kann.

Es folgt eine Reihe von Sätzen zu grundsätzlichen Eigenschaften von Zahlen und zur Teilbarkeit von Zahlen. Beispiele: Kommutativität der Multiplikation (Satz 16, Buch VII); Teilerfremdheit der Quadrate teilerfremder Zahlen (Satz 27, Buch VII); Eine Zahl größer 1 ist entweder eine Primzahl oder hat eine Primzahl als Teiler (Satz 32, Buch VII).

Im Übrigen werden viele Sätze der Proportionenlehre (Buch V) nochmals speziell für Zahlen bewiesen (*Zahlen* bedeutet hier immer *natürliche Zahlen*). Für *Zahlen* hat Euklid (warum auch immer) eine eigene spezielle Definition von *„in Proportion stehen“* („im gleichen Verhältnis stehen“) geliefert. Warum er nicht auch in der Arithmetik einfach auf die bereits entfaltete Proportionenlehre von Eudoxos zurückgreift, gilt allgemein als Rätsel. Das zwingt ihn nun aber etliche Sätze nochmals neu zu beweisen.

Das Buch VII endet mit dem Thema *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV). Das vorgestellte Verfahren (Satz 34, Buch VII) wird dabei so verallgemeinert, dass auch *das kleinste gemeinsame Vielfache* für 3 Zahlen bestimmbar ist (Satz 36, Buch VII).

29 Neue Axiome oder Postulate benennt Euklid beim Übergang zur Arithmetik nicht. Dass man auch natürliche Zahlen axiomatisch charakterisieren kann und soll, wurde erst im 19. Jahrhundert richtig akzeptiert (Peano).

Buch VIII und IX – Zahlentheorie (Satz von Euklid)

Die Bücher VIII und IX der *Elemente* lassen sich thematisch nicht natürlich gegeneinander abgrenzen. Sie werden deswegen gemeinsam behandelt.

Wie schon bei Buch VII werden auch in den beiden letzten Büchern der *Elemente* zur Arithmetik ausschließlich *natürliche* Zahlen behandelt. Das Thema der den Griechen sehr wohl bekannten Bruchzahlen wird gemieden. Dadurch werden viele interessante Resultate der antiken Mathematik ausgespart. Es ist deswegen nicht verwunderlich, dass die *Elemente* trotz ihrer Stellung als Referenzwerk im Bereich Geometrie, im Bereich Arithmetik niemals die gleiche Bedeutung erreichten. Bis zum Erscheinen des antiken Standardwerks für Arithmetik – der *Arithmetika* des Diophantes von Alexandria – vergingen allerdings noch mehr als 500 Jahre. Um 250 n.Chr. erschien dessen ebenfalls in 13 Bücher gegliedertes Werk. Es war eine der Grundlagen der späteren Reifung arithmetischer und algebraischer Methoden im arabischen Raum. Hier war das Werk ab dem 10. Jahrhundert in arabischer Übersetzung verfügbar und beflügelte (neben den Werken von Euklid, Archimedes und anderen) die islamische Blütezeit der Mathematik.

Der Blickwinkel, unter dem Euklid Arithmetik (genauer: elementare Zahlentheorie) betreibt, ist offensichtlich durch zwei Aspekte tief geprägt:

(a) Die Neigung Arithmetik in Anlehnung an die Geometrie zu betreiben und schon allein deswegen geometrisch gut deutbaren Konzepten wie Quadrat- und Kubikzahlen besondere Aufmerksamkeit zu schenken;

(b) Die Wertschätzung besonders ästhetischer Proportionen, wie der *geometrischen Proportion*.[30]

Das Konzept der *geometrischen Proportion* spielt in der Mathematik auch heute noch eine sehr wichtige Rolle. Hingegen hat die Aufmerksamkeit, die solche Konzepte wie Quadrat- oder Kubikzahlen erhalten, mittlerweile deutlich nachgelassen.

> Zu (a): Euklid definiert nicht nur die noch heute gängigen Begriffe der Quadrat- und Kubikzahl, sondern er kennt auch noch die *ebene Zahl* (darstellbar als Produkt zweier natürlicher Zahlen) und die *körperliche Zahl* (darstellbar als Produkt dreier natürlicher Zahlen). Insbesondere zu *ebenen* Zahlen beweist Euklid eine Vielzahl von Sätzen. Wie stark der geometrische Zugang zur Zahlentheorie bei Euklid ist, erkennt man auch daran, dass er selbst in seinen arithmetischen Büchern zur Beweiserläuterung gern geometrische Skizzen verwendet. Zahlen werden dabei als *Strecken* dargestellt.
>
> Zu (b): Vier natürliche Zahlen a, b, c, d heißen *in Proportion* stehend, wenn $a : b = c : d$. Sie stehen *in geometrischer Proportion*, wenn zusätzlich $a : b = b : c$ (und damit auch $b : c = c : d$) erfüllt ist.
>
> Das Konzept der *geometrischen Proportion* für 4 Zahlen lässt sich ganz natürlich zum Konzept der *geometrischen Folge* für beliebig viele Zahlen verallgemeinern. Hat man eine Folge von Zahlen a, b, c, d, e, f, ... so spricht man von einer *geometrischen Folge*[31] falls:
>
> $a : b = b : c = c : d = d : e = e : f$ und so fort gilt.

30 Zur Begriffsklärung siehe weiter unten.

31 Euklid (bzw. die verwendete Übersetzung der *Elemente*) benutzt hier den Terminus *geometrische Reihe*. Ich ziehe den aus moderner Sicht passenderen Begriff der *geometrischen Folge* vor.

Eine geometrische Folge muss dabei mindestens 3 Glieder besitzen. Solche geometrischen Folgen würden modern in der Form

$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots$ (mit *q* als Proportionalitätsfaktor)

notiert. Geometrische Folgen tauchen in vielen von Euklids Lehrsätzen auf.

Einige beispielhaft ausgewählte Sätze sollen einen ungefähren Eindruck davon vermitteln, für welche Art von Fragen sich Euklid in seinen arithmetischen Büchern interessiert.

Ist in einer (endlichen) geometrischen Folge natürlicher Zahlen die erste Zahl ein Teiler der letzten Zahl, so ist die erste Zahl auch Teiler der zweiten Zahl (Satz 7, Buch VIII).[32]

Sind a und b natürliche Zahlen(a,b >0; a < b), so gilt für c = ab, dass $a^2 : c = c : b^2$ (Satz 11, Buch VIII). M.a.W.: Es gibt zu zwei Quadratzahlen stets eine Zahl mit der sich eine geometrische Proportion ergibt. Beispiel: 25 und 36 stehen mit 30 in geometrischer Proportion: 25 : 30 = 30 : 36.

Bilden drei natürliche Zahlen eine geometrische Folge und ist die erste eine Quadratzahl, dann muss auch die letzte eine Quadratzahl sein (Satz 22, Buch VIII).

Bilden vier natürliche Zahlen eine geometrische Folge und ist die erste eine Kubikzahl, so muss auch die vierte eine Kubikzahl sein. (Satz 23, Buch VIII).

Seien a, b, c, d natürliche Zahlen mit a : b = c : d, dann ist das Produkt der ebenen Zahlen (ab) * (cd) eine Quadratzahl (Satz 1, Buch IX). Hierzu der Wortlaut bei Euklid:

Entsteht eine Zahl dadurch, dass zwei ähnliche ebene Zahlen einander vervielfältigen, so muss das Produkt eine Quadratzahl sein.

Beginnt eine geometrische Folge natürlicher Zahlen mit der 1, so muss die dritte Zahl eine Quadratzahl, die vierte eine Kubikzahl und die siebente zugleich Quadrat- und Kubikzahl sein (Satz 8, Buch IX).[33]

Der Höhepunkt ist der Nachweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen. Dieser bedeutende Satz der Zahlentheorie wird ohne Zusammenhang mit den vorhergehenden Sätzen, plötzlich und etwas unerwartet als Satz 20, Buch IX bewiesen:

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen. (Satz von Euklid)

Euklid beweist diesen Satz durch einen einfachen Widerspruchsbeweis. Er gilt gerade auf Grund seiner Einfachheit nach wie vor als einer der schönsten Beweise in der Zahlentheorie. Da er auch sehr kurz ist, soll er ganz ausnahmsweise und in einer leicht modernisierten Sprechweise vorgetragen werden (s. Kasten nächste Seite).

Im Anschluss an diesen Satz 20 wendet sich Euklid dem Thema *gerade* und *ungerade* Zahlen zu. Der unmittelbar folgende Satz 21, Buch VII trifft die vergleichsweise unaufregende Feststellung, dass die Summe gerader Zahlen immer gerade ist. Satz 22, Buch VII erklärt, dass eine Summe ungerader Zahlen gerade ist, falls die Anzahl der Summanden gerade ist, hingegen eine ungerade Summe entsteht, wenn eine ungerade Anzahl von Summanden addiert wird. In einem nach Strenge strebenden Lehrbuch der Mathematik müssen halt auch die einfachen und anscheinend selbstverständlichen Sätze bewiesen werden. Allerdings beschäftigt sich Euklid anschließend noch lange – über

32 Eine solche kleine Schlussfolgerung, wie dass damit die erste Zahl auch automatisch Teiler aller anderen Zahlen der geometrischen Folge ist, spricht Euklid nicht aus. Er erwartet von seinem Leser, dass er so etwas alleine und beiläufig erkennt.

33 Der Satz bei Euklid stellt zusätzlich noch klar, mit welcher Frequenz Quadrat- und Kubikzahlen im weiteren Verlauf der geometrischen Folge auftauchen müssen.

Satz: Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Beweis: Angenommen a,b,c seien die vorgelegten Primzahlen. Betrachten wir dann die Zahl d =abc + 1. Entweder ist *d* selbst Primzahl oder wird von einer Primzahl geteilt (Satz 32, Buch VII). Ist *d* Primzahl, so ist die Behauptung, dass es nur die vorgelegten Primzahlen gibt, bereits widerlegt.

Ist *d* keine Primzahl, so muss es eine Primzahl geben, die *d* teilt. Sei *g* eine solche Primzahl. *g* kann aber keine der vorgelegten Primzahlen a,b,c seien, denn sonst müsste *g* gleichzeitig Teiler von abc und d=abc + 1 sein. Damit aber müsste *g* auch Teiler von 1 sein, das ist aber unmöglich. Folglich kann *g* keine der vorgelegten Primzahlen sein.

Folglich gibt es zu jeder vorgelegten Anzahl von Primzahlen noch eine weitere Primzahl. q.e.d. (Mit anderen Worten: Es gibt unendlich viele Primzahlen.)

etliche Seiten hinweg – mit dem Thema Gerades und Ungerades. Das wird nur verständlich, wenn man bedenkt, dass die *Pythagoreer* der Unterscheidung zwischen *Geradem* und *Ungeradem* eine geradezu mystische Bedeutung beimaßen. Auch Plato hielt diese Unterscheidung für besonders wichtig und tiefsinnig. Wahrscheinlich sind also Euklids etwas arg umfangreich geratene Ausführungen zum Thema *Gerades und Ungerades* einfach nur eine tiefe Verbeugung vor diesen Heroen und Förderern der beweisenden Mathematik.

Buch IX endet mit einem Satz über *vollkommene* Zahlen (Satz 36, Buch IX). Und damit endet dann auch Euklids Ausflug in die Arithmetik.

Vollkommene Zahlen sind Zahlen, die gleich der Summe ihrer *Teil***e** sind. *Teil***e** sind dabei einerseits die *Teil***er,** anderseits aber auch noch die ***1***. So ist 6 eine vollkommene Zahl, da:

6 = 3 + 2 + 1.

Hier lohnt sich eine kleine Zwischenbemerkung: Euklids Arithmetik, die ja elementare Zahlentheorie ist, formulierte bereits in Buch VII einige wichtige Sätze zu Primzahlen. Was dabei aber aus heutiger Sicht „fehlt“, ist der *Fundamentalsatz der Zahlentheorie*:

> Jede natürliche Zahl > 1 ist entweder Primzahl oder besitzt eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Primfaktorzerlegung.

Euklid kommt dem *Fundamentalsatz der Zahlentheorie* in Buch VII so nahe, dass man sich bei der Lektüre fast schon ungeduldig fragt, wann er ihn denn nun endlich formuliert und beweist. Er wird aber bei Euklid *nicht* formuliert. Hätte Euklid diesen Satz bewiesen, so hätte er den Beweis des letzten Satzes aus Buch IX vereinfachen können.

Dieser Satz 36, Buch IX besagt:

Ist die Summe $1 + 2 + 4 + ... + 2^k = p$ eine Primzahl, dann ist $p2^k$ eine vollkommene Zahl.

> Beispiele:
>
> 1 + 2 + 4 = 7, das ist eine Primzahl; mit dem zugehörigen k=2 ergibt sich nach obiger Formel der Wert 28. Folglich ist 28 eine vollkommene Zahl.
>
> 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31, das ist eine Primzahl; mit dem zugehörigen k=4 ergibt nach obiger Formel 496. Folglich ist 496 eine vollkommene Zahl.

Der Beweis dieses Satzes ist bei Euklid etwas mühsam zu lesen. Hauptursache der Schwerfälligkeit des Beweises: Euklid stand der *Fundamentalsatz der Zahlentheorie* nicht zur Verfügung. Er muss deswegen lange und zum Teil recht verschlungene Wege gehen. Das macht den Beweisgang etwas unübersichtlich.

Buch X – Inkommensurables

Buch X ist das umfangreichste. Es macht ca. ein Viertel der gesamten *Elemente* aus.

Buch X ist der Ort an dem Euklid endlich auf *inkommensurable* Größen zu sprechen kommt. Deren Entdeckung hatte in der Antike überaus großen Eindruck gemacht.

Aus ***moderner*** Sicht entspricht die Unterscheidung *kommensurabel* oder *inkommensurabel* der Frage, ob sich das Größenverhältnis *zweier* Strecken, Flächen oder Volumina mit einer *rationalen* Zahl (den antiken Griechen bekannt) oder nur mit einer *irrationalen* Zahl (den antiken Griechen unbekannt) ausdrücken lässt.

Kommensurabel oder *inkommensurabel* ist eine Größe (Strecke, Fläche, Volumen) *immer nur* in Bezug auf eine andere Größe. Zwei Größen sind nach Euklids Definition *kommensurabel*, wenn es ein gemeinsames Maß gibt. Es also ein Drittes gibt, als dessen Vielfaches *beide* Größen ausgedrückt werden können.[34] *Inkommensurabel* sind zwei Größen, wenn es ein solches Drittes nicht gibt.

Im Quadrat sind *Basis* und *Diagonale* zwei zu einander *inkommensurable* Größen (Strecken).[35] Betrachtet man aber eine der beiden Strecken nur für sich *alleine*, dann macht die Frage, ob sie nun kommensurabel oder inkommensurabel ist, keinen Sinn.

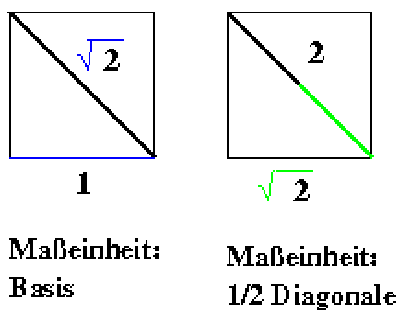


Abbildung 18: Inkommensurable Basis und Diagonale im Quadrat

Man beachte: Die Frage ob wir eine Strecke im Quadrat mit einem *irrationalen* Wert messen, hängt von der Wahl unserer Maßeinheit ab. Wählt man z.B. die Basis des Quadrats als Einheit, dann wird die *Basis* mit 1, die *Diagonale* mit $\sqrt{2}$ gemessen. Wählt man hingegen die Hälfte der Diagonale als Einheit, dann wird die *Diagonale* mit 2 und die *Basis* mit $\sqrt{2}$ gemessen (s. Abb. 18). Keine der beiden Strecken hat also „an sich“ eine „irrationale“ Länge. Ob die Maßzahl rational oder irrational ist, hängt vielmehr von der frei wählbaren Maßeinheit ab. Hingegen liefert das *Verhältnis* der Längen von Diagonale und Basis immer den *irrationalen* Wert: *Wurzel aus 2*.

In Satz 10, Buch X beweist Euklid, dass man bei jeder vorgelegten Strecke eine zu ihr inkommensurable Strecke konstruieren kann.

Euklid untersucht nun im Buch X sehr genau, welche Größen bei welcher Konstruktion, unter welchen Bedingungen zueinander kommensurabel bzw. inkommensurabel sind. Euklid nimmt das Thema zum Anlass, um eine sehr umfängliche Durchsicht und Klassifikation aller nur möglichen Arten von Konstruktionen durchzuführen. Zur tieferen Durchdringung des Themas *geometrische Konstruktionen und Inkommensurabilität* werden immer subtilere Unterscheidungen getroffen. Abweichend vom bisher üblichen Stil wurden diesmal die benötigten Definitionen auch nicht alle am Anfang des Buches X zentralisiert, sondern etliche der Definitionen werden erst spät – zwischen die verschiedenen Sätze und Beweise eingestreut – eingeführt.

Die hier vorgenommene Analyse und Systematisierung der geometrischen Konstruktionen ist der mathematisch anspruchsvollste Teil der ganzen *Elemente*.

---

34 Das Dritte kann allerdings auch ein Zweites sein. Das heißt, wenn die eine Größe ein ganzzahlig Vielfaches der anderen ist, benötigt man keine Dritte Größe, sondern man kann die kleinere der zu vergleichenden Größen als Maß verwenden.

35 Buch X, Satz 115a

Buch XI – Anfänge der Stereometrie

In Buch XI erfolgt der Einstieg in die Stereometrie (Theorie räumlicher Figuren). Das Buch beginnt mit einer langen Reihe von Definitionen. Neben den jetzt erforderlichen Klärungen zu Ebenen und Winkeln im Raum, wird eine Vielzahl von Körpern (Würfel, Pyramide, Prisma, Kugel, Zylinder, Kegel, etc.) definiert. Die hier eingeführten Definitionen liefern auch bereits den Großteil des begrifflichen Rahmens für die ebenfalls stereometrischen Bücher XII und XIII.

Euklid hält es nicht für erforderlich beim hier erfolgenden Übergang von der Planimetrie zur Stereometrie neue Postulate einzuführen. Spezielle Axiome (Postulate) des Raums gibt es in den *Elementen* nicht. Euklid geht vielleicht irriger Weise davon aus, dass die Axiome und Postulate aus Buch I auch eine ausreichende Grundlage für seine Stereometrie darstellen. In der Folge ist die Grundlegung der Stereometrie bei Euklid längst nicht so streng wie die der Planimetrie.

Als erstes beschäftigt sich Euklid mit den grundlegenden Beziehungen von Geraden und Ebenen im Raum. Einige Beispiele:

(i) Wenn zwei gerade Linien einander schneiden, liegen sie in einer Ebene; und jedes Dreieck liegt in einer Ebene (Satz 2, Buch XI);

(ii) Der Schnitt zweier Ebenen liefert eine Gerade (Satz 3, Buch XI);

(iii) Wenn zwei Geraden senkrecht auf einer Ebene stehen, dann sind sie parallel (Satz 6, Buch XI);

(iv) Ebenen, auf denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind zueinander parallel (Satz 14, Buch XI).

Die Sätze (i) und (ii) hätte Euklid besser als Postulate gefordert, statt sich an deren Beweis zu versuchen. Es gelingen ihm nur Scheinbeweise. Heute werden solche Eigenschaften axiomatisch gefordert. Der Sachverhalt (i) erhält dabei meist die wohl etwas vertrauter wirkende Form: *3 nicht auf einer Geraden angeordneten Punkte liegen stets in einer gemeinsamen Ebene*.

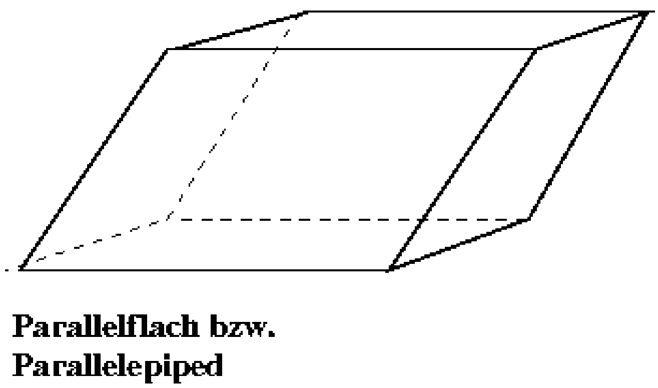


Abbildung 19: Beim Parallelflach sind alle Seiten Parallelogramme und gegenüberliegende Seiten liegen in parallelen Ebenen

Die erste räumliche Figur die von Euklid genauer untersucht wird, ist das *Parallelflach* oder auch *Parallelepiped (s. Abb. 19)*.

Drei bei Euklid in unmittelbarer Folge bewiesene Sätze sollen einen Eindruck von seiner Vorgehensweise vermitteln.

Er zeigt als erstes, dass Parallelflache auf der gleichen Grundfläche und mit der gleichen Höhe das gleiche Volumen haben (Satz 31, Buch XI).

Da auch ein Quader nur eine spezielle Form eines Parallelflachs ist, ist dieser Satz durchaus ergiebig:

Ein Parallelflach hat dasselbe Volumen wie ein Quader mit gleicher Grundfläche und Höhe.

Wir wissen aus Euklids Planimetrie, dass zwischen zwei Parallelen aufgespannte Parallelogramme die gleiche Fläche haben, sofern sie nur über der gleichen Basis errichtet wurden. Also können wir zu einem gegebenem Parallelogramm auch einfach ein flächengleiches Rechteck erzeugen. Schließlich ist ein Rechteck nur eine besondere Form eines Parallelogramms. Damit sind dann alle Voraussetzungen erfüllt, um ein zu einem vorgelegtem Parallelflach einen Quader gleichen Volumens erzeugen zu können.[36] Da weiterhin bekannt ist, wie man ein Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandelt, kann man sogar zu jedem vorgelegten Parallelflach einen volumensgleichen quadratischen Quader erzeugen.

Im nachfolgenden Satz 32, Buch XI behandelt Euklid Parallelflache mit unterschiedlicher Grundfläche, aber gleicher Höhe:

> Bei gleicher Höhe verhalten sich die Volumina zweier Parallelflacher wie ihre Grundflächen (s. Abb. 20).

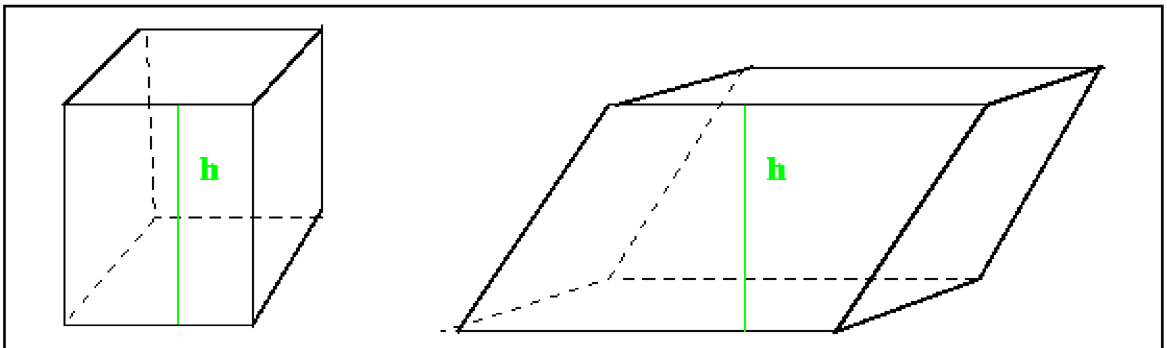


Abbildung 20: Parallelflache mit gleicher Höhe

Es folgt bei Euklid Satz 33, Buch XI:

> Seien A und B zwei ähnliche Parallelflache und k der *Ähnlichkeitsfaktor*, dann liefert k^3 das Verhältnis ihrer Volumina. (s. Abb. 21)

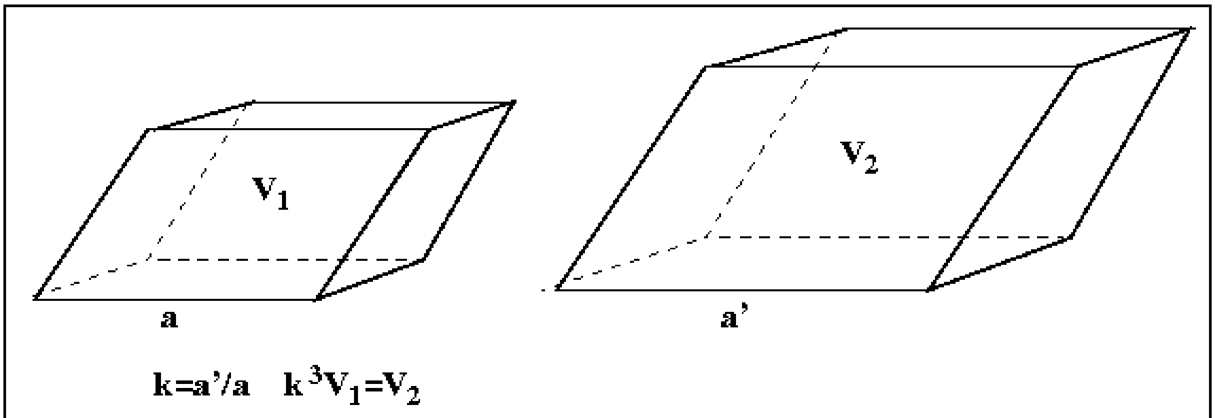


Abbildung 21: Volumina bei ähnlichen Parallelflachen

Die hier vorgestellten drei Sätze zu Parallelflachen sind typisch für die Art in der Euklid im stereometrischen Teil der *Elementen* die verschiedenen Körper diskutiert.

Neben Parallelflachen behandelt Euklid im Buch XI nur noch das Prisma etwas genauer.

36 Bei Bedarf kann man sich hierüber auch einen formelmäßigen Zugang zum Volumen eines Parallelflachs herleiten. Das ist allerdings nicht die Denkungsart von Euklid.

Buch XII – Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel

In Buch XII werden die Figuren Pyramide (Dreiecks- wie Vieleckspyramide[37]), Prisma, Zylinder, Kegel und Kugel behandelt. Das Thema Quader ist für Euklid durch die Sätze zu Parallelflachen erledigt und damit erübrigt hier sich auch zunächst mal eine Diskussion von Würfeln.[38]

Bevor Euklid allerdings den Faden der Stereometrie wieder aufnimmt, trägt er noch ein Resultat zur Kreisgeometrie nach:

> Die Flächen von Kreisen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser (Satz 2, Buch XII).

Danach beginnt Euklid mit der Erörterung von Dreiecks- und Vieleckspyramiden (s. Abb. 22).

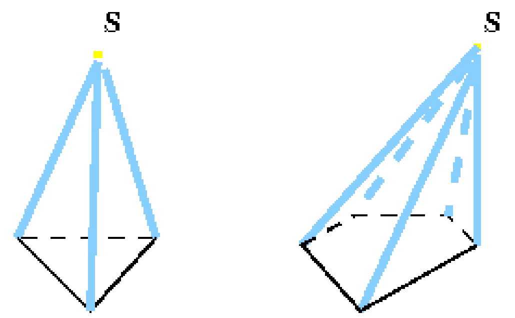


Abbildung 22: Je ein Beispiel zu Dreiecks- wie Fünfeckspyramide

In Satz 3, Buch XII beweist Euklid, dass sich jede Dreieckspyramide in zwei ihr ähnliche Pyramiden plus zwei untereinander volumensgleiche Prismen[39] zerlegen lässt.

Es folgen Sätze, die an die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Sätze zu Parallelflachen erinnern:

Die Volumina von Pyramiden mit gleicher Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen der Pyramiden (Satz 5 u. 6, Buch XII).

Die Volumina ähnlicher Dreieckspyramiden verhalten sich wie die 3. Potenz ihres *Ähnlichkeitsfaktors* (Satz 8, Buch XII).

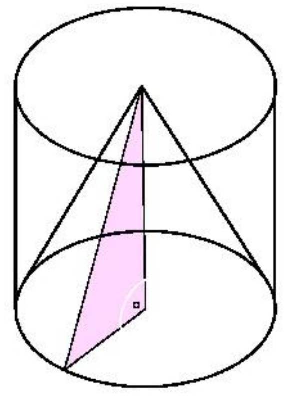


Abbildung 23: Kegel und umschreibender Zylinder

Ab Satz 10, Buch XII sind Zylinder und Kegel Thema. Als erstes wird gezeigt, dass das Volumen eines Kegels 1/3 des Volumens des umschließenden Zylinders ist (s Abb. 23).

Besitzen zwei Kegel (oder Zylinder) die gleiche Höhe, so sind ihre Volumina proportional zur Grundfläche (Satz 11, Buch XII).

Die Volumina ähnlicher Kegel (und ähnlicher Zylinder) verhalten sich zueinander wie die 3. Potenz ihres Grundflächendurchmessers (Satz 12, Buch XII).

Die Volumina von Kegeln (Zylindern) mit gleichen Grundflächen verhalten sich jeweils zueinander wie ihre Höhen.

Buch XII endet mit einer kurzen Erörterung der Kugel. Neben der Erörterung der Konstruktion konzentrischer Kugeln (Satz 17, Buch XII) wird ein zentraler Satz zum Volumen von Kugeln bewiesen:

Die Volumina von Kugeln stehen im Verhältnis der 3. Potenz ihrer Durchmesser (Satz 18, Buch XII). Damit endet Buch XII.

---

37 Eine Vieleckspyramide ist eine Pyramide über einem nicht notwendig regelmäßigen Vieleck (n-Eck, n>3).

38 Erst in Buch XIII beschäftigt sich Euklid wieder mit dem Thema Würfel. Dort taucht dann auch noch mal eine spezielle Dreieckspyramide, nämlich das Tetraeder, auf. Beide werden dann unter der Überschrift *platonische Körper* diskutiert.

39 Mit Ausnahme dieser Erwähnung des Prismas übergehe ich ansonsten die verschiedenen Sätze zu Prismen.

Buch XIII – goldener Schnitt und platonische Körper

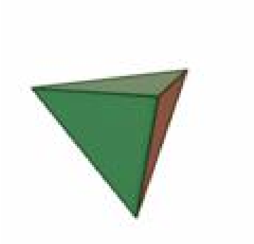


Abbildung 25: Tetraeder; 4 kongruente, gleichseitige Dreiecke

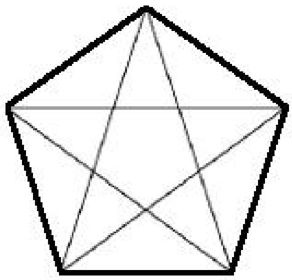


Abbildung 24: Pentagramm im regelmäßigen Fünfeck

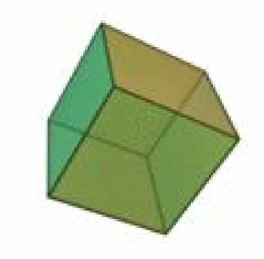


Abbildung 26: Würfel; 6 kongruente Quadrate

Buch XIII beginnt zunächst mit einigen Sätzen zum goldenen Schnitt (stetig geteilten Strecken, in der Sprechweise Euklids).

Dann folgen Sätze zum regelmäßigen Fünfeck. Dabei wird auch bewiesen, dass beim Pentagramm (dem Symbol der Pythagoreer) sich die Seiten wechselseitig im Verhältnis des goldenen Schnitts teilen (Satz 8, Buch XIII; vgl. Abb. 24).

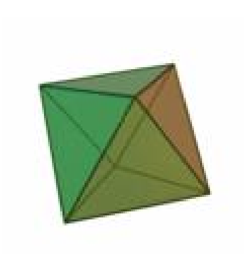


Abbildung 28: Oktaeder; 8 kongruente, gleichseitige Dreiecke

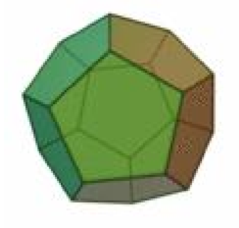


Abbildung 27: Dodekaeder; 12 kongruente, regelmäßige Fünfecke

Das Hauptthema von Buch XIII sind jedoch platonische Körper. *Platonisch* heißt ein Körper, wenn seine Seiten (Grenzflächen) aus geradlinig begrenzten, kongruenten Figuren bestehen und in den Eckpunkten immer gleich viele Flächen gleichartig zusammentreffen. Die fünf platonischen Körper sind: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

Zunächst zeigt Euklid, wie sich jede der fünf platonischen Körper einer Kugel einbeschreiben lässt (Sätze 13, 14, 15, 16, 17 von Buch XIII).

Als letzten Satz von Buch XIII und damit als letzten Satz der *Elemente* überhaupt, beweist Euklid, dass es außer den fünf aufgeführten platonischen Körpern *keine* weiteren platonischen Körper geben kann (Satz 18a, Buch XIII).

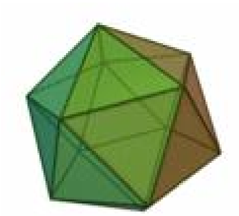


Abbildung 29: Ikosaeder; 20 kongruente, gleichseitige, Dreiecke

Nachbemerkung

Es wurde behauptet, dass die *Elemente* jenseits der Axiome (und Postulate) nichts außer Definitionen, Sätzen und Beweisen enthalten. Nun diese Behauptung ist nur *beinahe* richtig. Zu Beginn von Buch XIII gibt es eine kurze Passage, die nicht ins sonst durchgehaltene Schema *Definition, Satz, Beweis* passt. Euklid erwägt hier kurz, auf welche Weise man deduktives Denken verwenden kann. Er unterscheidet *Analysis*[40] und *Synthesis:*

> Eine Analysis ist die Zugrundelegung des Gefragten als anerkannt um seiner auf anerkannt Wahres führenden Schlussfolgerung willen.
>
> Synthesis ist die Zugrundelegung des Anerkannten um seiner auf Vollendung oder Ergreifung des Gefragten führenden Folgerungen willen.[41]

Die *Synthesis* ist das Verfahren, mit dem in der Mathematik Sätze bewiesen werden: Aus bereits Anerkanntem (Bewiesenem oder axiomatisch Vorausgesetztem) werden logische Schlussfolgerungen gezogen, um so interessierende Fragen klären zu können.

Die *Analysis* ist *kein* Verfahren, bei dem eine fragliche Behauptung bewiesen wird, sondern bei dem gezeigt wird, dass eine Behauptung mit anderen Orts erzielten Resultaten harmoniert, sprich, dass bereits Bekanntes logisch aus ihr folgt.

Analysis spielt eine Rolle bei der mathematischen Forschungsarbeit. Hat man eine Vermutung zu einem mathematischen Problem, es mangelt aber noch an fruchtbaren Beweisideen, dann kann es sehr nützlich sein den Blickwinkel mal zu ändern und nachzusehen, welche bereits bewiesenen Sätze sich denn aus dieser Vermutung ableiten lassen. Die aus der Vermutung ableitbaren Sätze eignen sich nämlich häufig als Ausgangspunkt des gesuchten Beweises, und deren Herleitung aus der Vermutung enthält gar nicht so selten den entscheidenden Hinweis zur benötigten Beweisidee.

Analysis verwendet man in der Mathematik aber auch manchmal dazu, um die Stellung und Bedeutung eines frisch bewiesenen Resultats im Gesamtgefüge einer Theorie zu beleuchten. Dies kann für ein tieferes Verständnis eines Satzes höchst hilfreich sein.

In beiden Fällen ersetzt die *Analysis* keinen Beweis, sondern ist entweder Hilfsmittel zur Entdeckung eines Beweises oder Instrument zur Erhellung von Bedeutung und Stellung eines Satzes im Gesamtgefüge einer Theorie.

Wahrscheinlich hatte Euklid nur solche mathematischen Anwendungen der *Analysis* im Auge. Ich finde es trotzdem sehr interessant, dass die von ihm beschriebene *Analysis* dem Modell des hypothetisch deduktiven Denkens in den Naturwissenschaften sehr nahe steht. Das Vertrauen in naturwissenschaftliche Theorien beruht (wesentlich) darauf, dass sie zu korrekten Schlussfolgerungen führen: Ihre Prognosen treffen zu. Und das begründet (wesentlich) unser Vertrauen in die Theorie.

Man stellt Vermutungen über Gesetzmäßigkeiten auf, zieht Schlussfolgerungen aus diesen Vermutungen und stellt dann fest, dass diese Schlussfolgerungen immer wieder mit „anerkannt Wahrem“ (unstrittigen Tatsachen) übereinstimmen. Das begründet unser Vertrauen in die Vermutungen, die wir dann irgendwann nur noch Naturgesetze nennen.

Die *Analysis* des Euklid und das Modell des hypothetisch deduktiven Denkens sind wirklich nicht weit von einander entfernt.

---

40 Diese *Analysis* hat natürlich nichts mit dem modernen Begriff Analysis zu tun. Heute versteht man unter Analysis Grenzwertbetrachtungen bei Folgen und Reihen bis hin zur Differential- und Integralrechnung.

41 Euklid: Die Elemente. Frankfurt/M: Harri Deutsch 1997. S. 386 f

Anmerkungen zur Überlieferungsgeschichte

Während die griechische Antike die *Elemente* als einen ihrer Schätze hütete und über viele Jahrhunderte bewahrte,[42] waren im katholischen Europa zur Zeit von Karl dem Großen nur noch höchst unvollständige, lateinische Exzerpte der *Elemente* verfügbar. Das populärste stammte von Boethius (ca. 480 – 525) und wurde zur Zeit des Gotenkönigs Theoderich in Rom erstellt. Boethius hat Theoderich zunächst als hoher Beamter gedient, fiel dann aber in Ungnade, wurde eingekerkert und schließlich hingerichtet.

Das Exzerpt von Boethius enthielt die Axiome und Postulate, die Definitionen der Bücher I - V, die Mehrzahl der Sätze aus den Büchern I – IV sowie die Beweise der Sätze 1 - 3 aus Buch I. Mehr nicht![43] Diese zusätzlich sehr rare Schrift war im frühen Mittelalter der beinahe einzig verbliebene Zugang zu Euklids *Elementen*. Anderen Schriften der antiken Mathematik ist es nicht wesentlich besser ergangen:

> Was sich bis zum Ende des 1. Jtds. an Kenntnissen der wissenschaftlichen Mathematik der klassischen Antike erhalten hat, waren kümmerliche Bruchstücke, hauptsächlich weitergegeben durch gelehrte Mönche in den Klöstern.[44]

Die Araber hatten jedoch die Bedeutung von Euklids *Elementen* bemerkt. Die ihnen seit dem 8. Jahrhundert bekannten *Elemente* übersetzten sie ungekürzt ins Arabische. Als die Spanier im Rahmen der Reconquista 1075 Toledo von den Mauren eroberten, erhielten sie auch Zugriff auf islamische Bildungsgüter. Daneben waren auch Kontakte mit der islamischen Kultur auf Sizilien und in Unteritalien von einiger Bedeutung. Und so begann man nun viele arabische Texte, darunter auch die Elemente, ins Lateinische übertragen.

Im 12. Jahrhunderts wurden auf der Grundlage der arabischen Texte verschiedene lateinische Übersetzungen der *Elemente* fertig gestellt.[45] Sie umfassten auch die (unechten) Bücher XIV und XV. Aber vor allem, sie enthielten die Beweise!

Nach den Übersetzungen aus dem Arabischen kümmerte man sich auch darum, wieder Zugang zu den griechischen Quellen zu bekommen. Die orthodoxe byzantinische Tradition hatte im Gegensatz zum katholischen Europa die griechischen Quellen bewahrt.[46]

Im späten Mittelalter stehen außer lateinischen Übertragungen der *Elemente* auch verschiedene Bearbeitungen und Kommentare zu Euklids *Elementen* zur Verfügung. Neben den ebenfalls wieder zugänglich gewordenen Schriften anderer antiker Autoren (z.B. Archimedes), sowie übersetzter Schriften islamischer Autoren, bilden die *Elemente* und die Euklid Kommentare die wichtigste Grundlage für die akademische Beschäftigung mit Mathematik.

1482 gehen die *Elemente* erstmals in Druck. Ein Augsburger Drucker lässt in Venedig die erste Auflage der *Elemente* erscheinen. Damit beginnt der Aufstieg der *Elemente* zum Weltbestseller.

Die *Elemente* gehörten zum selbstverständlichen akademischen Rüstzeug von Descartes, Galilei, Kepler und Newton. Ohne die Wiederherstellung des Zugangs zu den Ergebnissen der antiken Mathematik wäre der ab dem 15. Jahrhundert einsetzende wissenschaftliche Aufbruch in Europa wohl kaum möglich gewesen. Und die *Elemente* spielten dabei die Rolle eines Schlüsselwerkes.

---

42 Während des Bewahrens wurden die *Elemente* allerdings auch redigiert. Insbesondere Theon von Alexandria (ca. 330 – 400 n.Chr.) bemühte sich um etliche kleine Verbesserungen. Seine Bearbeitung der *Elemente* wurde der Standard, der unseren heutigen Übersetzungen zu Grunde liegt..

43 Genau genommen müsste man hier zwischen verschiedenen Varianten von Boethius zugeschriebenen Euklid Exzerpten unterscheiden. (Der Vollständigkeit halber sei hier zudem auch noch das Exzerpt von Cassiodorus erwähnt.) Aber solche Details verändern das Gesamtbild nicht wesentlich. Insbesondere liefern sie keinen Anlass von einem höheren mathematischen Kenntnisstand im Mittelalter zu berichten. Zu den Details siehe z.B. hier

44 C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Berlin Heidelberg New York: Springer 2001. S. 194

45 Besonders abenteuerliche Geschichten ranken sich dabei um die Übersetzung durch *Adelhard von Bath*. Er soll sich, als Muslim getarnt, den Zugang zur arabischen Version der Elemente erschlichen haben. Siehe dazu auch hier.

46 Zur Überlieferungsgeschichte der *Elemente* siehe: Peter Schreiber: Euklid. BSB Teubner: Leipzig 1987. S. 96ff

More geometrico

Die Wiederentdeckung der *Elemente* hat einen tiefgreifenden Einfluss auf das europäische Geistesleben. Der Einfluss auf die Philosophie und die Naturwissenschaften ist dabei mindestens ebenso groß wie der Einfluss innerhalb der Mathematik.

More geometrico („nach der Art der Geometrie“) wird ganz allgemein zum Markenzeichen strengen Denkens. Wie in der Geometrie, so sollen nun auch in anderen Disziplinen Ergebnisse durch Herleitung aus ersten Grundsätzen (Axiomen) gewonnen werden.

Drei besonders prominente Beispiele sollen den Einfluss von Euklids axiomatischer Methode außerhalb der Mathematik kurz beleuchten:

- *René Descartes* (1596 – 1650), bedeutender Mathematiker und Neubegründer der europäischen Philosophie, versucht sich ausgehend vom berühmten *cogito, ergo sum* („ich denke, also bin ich“) eine Grundlage zu verschaffen, mittels derer dann, nach euklidischem Vorbild, sichere philosophische Ergebnisse durch streng logische Herleitung gewonnen werden sollen.
- *Baruch de Spinoza* (1632 – 1677) hinterließ als Hauptwerk *Ethica, ordine geometrico demonstrata* („Ethik. Nach geometrischer Methode dargestellt“). Spinoza wollte hier seinen philosophischen Pantheismus nach dem Muster der *Elemente* aus Axiomen streng herzuleiten.
- *Isaac Newton* (1643 – 1727) nennt die drei Grundgesetze seiner Mechanik *Axiome*. Sie bilden die logische Grundlage der newtonschen Mechanik. In seinem Hauptwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* leitet er daraus physikalische Resultate mit geometrischen Methoden her.

Ob der starke Einfluss der Geometrie auf andere Gebiete des Geisteslebens immer nur positiv war, kann bezweifelt werden. Dass es ihn gab, ist hingegen unzweifelhaft.

Auch Kants Philosophie wurde durch die Auseinandersetzung mit euklidischer Geometrie tief geprägt. Für Immanuel Kant (1724 – 1804) sind grundlegende Eigenschaften geometrischer Objekte das Ergebnis unabänderlicher, quasi eingeborener Konzepte des menschlichen Denkens. Wegen der uns eigenen Art der *Anschauung* können wir (so Kant) die Struktur *Raum* nur in ganz bestimmter Weise vorstellen, denken und erleben. Auf dieser Grundlage entwickelte Kant eine neue philosophische Deutung der (euklidischen) Geometrie: „Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt.“[47] Ein Urteil heißt *synthetisch* wenn es *nicht* rein logisch (aus der Analyse der verwendeten Begriffe) folgt, *a priori* beinhaltet, dass der Anspruch auf Geltung *unabhängig* von jedem Rückgriff auf Erfahrung ist. Kant will also die Sätze der Geometrie mittels unserer (inneren) Anschauung als *synthetische Urteile a priori* gewinnen:

> Aber diese Anschauung muß a priori, d.i. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes, in uns angetroffen werden, mithin reine, nicht empirische Anschauung sein. Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d.i. mit dem Bewußtsein ihrer Notwendigkeit verbunden, (...)[48]

Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien hat Kants Deutung in Schwierigkeiten gebracht. Heute unterscheidet man zwischen *einerseits* der Geometrie als *mathematischer Disziplin* und *anderseits* der Geometrie als *physikalischer Raum-Struktur*. Der Mathematiker bestimmt die Sätze die jeweils in euklidischer, hyperbolischer und elliptischer Geometrie gelten, der Physiker untersucht die Frage, ob der erfahrbare Raum euklidisch, hyperbolisch oder elliptisch ist. *Synthetisch* **und** *a priori*, diese Charakterisierung passt *weder* für die geometrischen Urteile des Mathematikers *noch* für die des Physikers.

47 Immanuel Kant: Kritik der reinen Vernunft. Abschnitt I, § 3. Meiner Verlag: Hamburg 1998. S. 100
48 Immanuel Kant: Kritik der reinen Vernunft. Abschnitt I, § 3. Meiner Verlag: Hamburg 1998. S. 100

Kritik der *Elemente*

Obwohl die *Elemente* das Leitbild mathematischer Perfektion geliefert haben, sind sie selbst doch nicht ganz perfekt. Eine über 2000 Jahre währende Beschäftigung mit den *Elementen* hat verschiedene Mängel zu Tage gefördert. Die *wichtigeren* dieser Mängel lassen sich in drei Hauptgruppen gliedern:

Fehlende Beweisteile;

Fehlende Sätze;

Fehlende Axiome.

Fehlende Beweisteile:

Es ist in der Mathematik nichts Ungewöhnliches, Sätze mit Hilfe einer Fallunterscheidung zu beweisen. Will man z.B. zeigen, dass der Cosinus-Satz ($\mathbf{a^2 + b^2 - 2\,ab \bullet \cos\gamma = c^2}$) für beliebige Dreiecke gilt, so reicht es, der Reihe nach zu zeigen, dass er jeweils erfüllt ist, falls die Seite *c*

(a) einem spitzen,
(b) einem rechtwinkligen oder
(c) einem stumpfen Winkel gegenüber liegt.

Wenn die gleiche Beweisstrategie in allen Fällen zum Erfolg führt, so führt man für gewöhnlich nur in einem Fall den Beweis richtig aus und begnügt sich ansonsten mit dem Hinweis, dass der *verständige* Leser die anderen Fälle nun leicht selbst beweisen kann. Euklid verwendet eine nochmals sparsamere Form des Beweises mittels Fallunterscheidung. Er erspart sich in solchen Fällen *jeden* Hinweis auf die Verkürzung des Beweises und erwähnt nicht, dass bisher nur einer von mehreren, zu betrachtenden Fällen bewiesen wurde. Das wäre zunächst einmal nicht mehr als ein kleiner Unterschied zwischen antiker und moderner Beweiskultur. Aber Euklid erlaubt es sich auch dann kommentarlos nur *einen* einzigen Fall zu beweisen, wenn *unendlich* viele Fälle zu beweisen wären. Das ist doch selbst bei Zubilligung gewisser Unterschiede in der Beweiskultur etwas zu wenig.

Euklid behauptet z.B. in Satz 45, Buch I, dass sich zu jeder geradlinig begrenzten Figur ein flächengleiches Parallelogramm konstruieren lässt, das einen frei wählbaren Winkel ε aufweist. Der nachfolgende Beweis deckt aber *nur* den Fall ab, dass die vorgegebene, geradlinig begrenzte Figur ein beliebiges *Viereck* ist.[49]

Zwar sieht man schnell, wie man die enthaltene Beweisidee mit den Mitteln der *vollständigen Induktion* zu einem allgemeinen Beweis ausbauen kann, aber die Beweismethodik der *vollständigen Induktion* kannte Euklid noch nicht. Man kann also schlecht davon ausgehen, dass er diesen letzten „kleinen“ Teilschritt einfach dem verständigen Leser überlassen wollte. Euklid mogelt hier einfach etwas. Der Satz behauptet mehr, als der Beweis hergibt. Euklid sieht zwar sicherlich, dass die benutzte Idee auch zum Beweis für weitere Figuren (Fünf-, Sechs-, Sieben-Ecke, etc.) taugt, aber da er nicht weiß, wie man streng zeigt, dass es wirklich für *alle* geradlinig begrenzten Figuren funktioniert, fängt er erst gar nicht damit an die verschiedenen, höheren Vielecke zu betrachten.

Fehlende Sätze:

Das Verbannen der anschaulichen Selbstverständlichkeiten aus der beweisenden Geometrie ist ein schwieriger Prozess. Und auch Euklid gelingt es nicht immer, ohne nur rein anschaulich begründete Voraussetzungen in seinen Beweisen auszukommen. Ein

49 Der Fall „Dreiecke“ kann durch vorige Sätze als erledigt gelten.

Beispiel hierfür sind sich schneidende Kreise. Zwei Kreise mit Radien $r_1 >= r_2$ deren Mittelpunkte einen Abstand *d* mit $r_1 – r_2 < d < r_1 + r_2$ aufweisen, müssen sich schneiden. Anschaulich ist das vollkommen klar. Euklid benutzt diese Voraussetzung häufig bei seinen Konstruktionen. Was allerdings fehlt, ist ein entsprechender Satz, samt zugehörigem Beweis.

Wenn in einer über 2000jährigen Rezeptionsgeschichte Generation um Generation die *Elemente* analysiert, dann fallen auch die kleinen Nachlässigkeiten irgendwann irgendwem auf.

Eine genauere Analyse hat dann aber gezeigt, dass nicht alle fehlenden Sätze bloß als *kleine* Nachlässigkeiten vermerkt werden können. Nicht alle fehlenden Sätze lassen sich im Rahmen einer wohlmeinenden Sanierung einfach nachträglich einschieben. Manche können im Rahmen der euklidischen Axiome (und Postulate) schlichtweg nicht hergeleitet werden.

Fehlende Axiome:

Über eine gründliche Analyse der Probleme mit *fehlenden Sätzen* stieß man so auf das Problem der *fehlenden Axiome*. Euklid gelingt es nicht, die uns so leicht zugängliche Vorstellung von den *idealen* Objekten der Geometrie auf vollkommen angemessene Weise in Axiome zu übersetzen. Dass stereometrische Axiome fehlen wurde bereits erwähnt.

Ein zusätzliches Beispiel, das auch die Planimetrie berührt, soll genügen: Dass von 3 Punkten auf einer Geraden einer der 3 zwischen den beiden anderen liegen muss, ist anschaulich vollkommen klar. Aber es lässt sich *nicht* aus den bei Euklid angegebenen Axiomen und Postulaten herleiten. Moderne Axiomensysteme zur Geometrie sichern deswegen diese Eigenschaft durch *zusätzliche* Axiome.

Obwohl also Euklids *Elemente* verschiedene Mängel aufweisen, bleibt ihnen doch das Verdienst, das Leitbild einer strengen axiomatischen Mathematik propagiert zu haben. Die *Elemente* haben dies sogar so wirkungsvoll getan, dass an Hand dieses Leitbildes die Schwächen der *Elemente* selbst aufgedeckt werden konnten.

Es spricht deutlich für den Lehrmeister, wenn seine Schüler lernen, auch die verdeckten Fehler und Ungenauigkeiten ihres Lehrers zu erkennen und zu korrigieren. In diesem Sinne ist die in über 2000 Jahren Rezeptionsgeschichte erstellte Mängelliste der *Elemente* letztlich ein Beweis für den durchschlagenden Erfolg der *Elemente*.

Das implizit propagierte Leitbild der *Elemente* wurde angenommen und in voller Strenge auf die *Elemente* selbst angewendet. Da der Nachweis einer bis dato unbekannten Schwäche in den *Elementen* lange Zeit mit besonderem Ansehen und/oder der Aussicht auf Verbesserung der beruflichen Stellung verbunden war, dürfte kaum eine der bemerkten Schwächen ohne eine entsprechende Veröffentlichung geblieben sein.

Über 2000 Jahre *Elemente* heißt also auch: Über 2000 Jahre Kritik der *Elemente*. Einer derart lang anhaltenden kritischen Überprüfung dürften nur wenige andere Werke ausgesetzt gewesen sein.

Die *Elemente* haben diesen langen Prozess der immer neuen kritischen Durchsicht gut überstanden. Die gefundenen Mängel haben ihrem Ansehen nicht geschadet. Bei der Wahl zum segensreichsten Buch der Menschheitsgeschichte hätten die *Elemente* noch immer keinen Konkurrenten zu fürchten.

Hilberts Reformulierung der *Elemente*

Anlässlich der Enthüllung des Gauß-Weber Denkmals in Göttingen wurde 1899 Hilberts Festschrift *Grundlagen der Geometrie* veröffentlicht. Sie gilt bis heute als *die* Reformulierung der axiomatischen Geometrie der *Elemente*. Als Neuentwurf der geometrischen Bücher der *Elemente* beseitigt sie die in 2000 Jahren entdeckten Mängel und berücksichtigt die seither erreichten Fortschritte.

Dass Hilbert zur Ehrung von Gauß, einem der Entdecker der nicht-euklidischen Geometrien, eine Festschrift zur euklidischen Geometrie vorlegt, ist eine deutliche Verbeugung vor dem Autor der *Elemente*. Es ist kaum anzunehmen, dass Gauß (oder Weber) damit Schwierigkeiten gehabt hätten.

Die 5 Postulate und 9 Axiome der *Elemente* werden bei Hilbert durch 20 Axiome, gegliedert in 5 Axiomengruppen, ersetzt. Einige der bei Euklid als Axiome bezeichneten Voraussetzungen werden *nicht* durch Hilberts neue Axiomatik der Geometrie abgedeckt. Das betrifft z.B. Euklids 1. Axiom: Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich. So etwas gilt modern als Teil der mathematischen Logik, und wird nicht als Axiom eines speziellen mathematischen Gebietes (wie z.B. der Geometrie) aufgefasst.[50]

Die Unverzichtbarkeit des *Parallelenaxioms* für die euklidische Geometrie war längst erwiesen und bei Hilbert erhält es nun, als einziges Axiom, eine Axiomengruppe (Axiomengruppe IV) ganz für sich allein. Statt des lange der Überflüssigkeit verdächtigten Parallelenaxioms (Postulat 5 der *Elemente*) ist in Wirklichkeit, so beweist es Hilbert, das Postulat 4 (Alle rechten Winkel sind einander gleich) überflüssig.

> Auf Grund der Größenvergleichung der Winkel gelingt der Nachweis des folgenden einfachen Satzes, den Euklid – meiner Meinung nach zu Unrecht – unter die Axiome gestellt hat.
>
> Satz 21. Alle rechten Winkel sind einander kongruent.[51]

Abseits aller Details zur euklidischen Geometrie benutzt Hilbert seine Festschrift *Grundlagen der Geometrie* aber auch, um für eine neue Interpretation des Konzepts *Axiomatik* in der Mathematik zu werben. Kernpunkt der Neuinterpretation axiomatischer Mathematik ist die These, dass die in den Axiomen auftauchenden Grundbegriffe *keiner* Definition bedürfen. Sie werden *implizit* durch die Axiome charakterisiert. Typischerweise geschieht die *implizite* Charakterisierung dadurch, dass die Axiome die Grundbegriffe über Beziehungen (Relationen, Operationen) miteinander verknüpfen.

Alles, was über die *implizite* Charakterisierung durch die Axiome hinausgeht, ist aus logischer Sicht unerheblich. Nur die Axiome *allein* entscheiden darüber, was herleitbar ist. Klärungen der Grundbegriffe sind dafür nicht nötig.

Hat man beispielsweise eine Trivialtheorie mit den zwei Axiomen:

(i) Alle x aus A sind trumms oder gaga

(ii) Alle x aus A die trumms sind, sind tritri

Dann folgt der Satz: *Alle x aus A die nicht tritri sind, sind gaga* streng logisch und zwar unabhängig davon, was die Worte „trumms“, „gaga“ und „tritri“ bedeuten.

---

50 Das gilt zumindest dann, wenn man das „gleich“ hier im Sinne von *identisch* interpretiert.

51 David Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, Leipzig: Teubner 1999. S. 23
Der Beweis dieses Resultats erfolgt allerdings vor dem Hintergrund einer Axiomatik die (im Vergleich zu Euklids *Elementen*) an anderen Stellen erheblich erweitert wurde.

Der Versuch einer Klärung der Grundbegriffe ist also lässlich, weil dadurch die Frage, welche Theoreme ableitbar sind, nicht beeinflusst wird. Die Versuche Euklids, die Grundbegriffe der Geometrie wie *Punkt*, *Strecke* etc. zu definieren sind überflüssig. Und dass keine befriedigenden Definitionen gelingen, schadet der Strenge seiner *Elemente* nicht.

Natürlich bilden auch für Hilbert Anschauung und Intuition weiterhin einen wichtigen Ausgangspunkt der mathematischen Theoriebildung. Hat man aber jenen Reifegrad der Überlegungen erreicht, dass man zu einer axiomatischen Theorie übergehen kann, dann muss man sich keine Sorgen darüber machen, ob es gelingt, die *Grundbegriffe* der Theorie zu *definieren*. Das einzige, was aus logischer Sicht zählt, ist die *implizite* Charakterisierung durch die Axiome.

Auch in Hilberts Festschrift kommen Begriffe wie *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* vor, aber er verwendet *keine* Zeile auf den Versuch, diese *Grundbegriffe* zu definieren.[52] Die Anschauung und Intuition, die uns anfänglich geführt haben, tragen zur *Strenge* der daraus entwickelten axiomatischen Theorie *nichts* bei. Dass die axiomatische Geometrie ursprünglich aus der Idealisierung natürlicher Anschauung entstanden ist, muss aber auch nicht verheimlicht werden.[53] Der Umstand, dass es so schwierig ist, den Vorgang der Idealisierung mit Strenge zu fassen, ist weder der Bedeutung von Anschauung und Intuition als Quellen der Mathematik, noch der Qualität der durch sie inspirierten axiomatischen Theorien, abträglich. Wir müssen nicht mit letzter Klarheit angeben können, was ein *idealer* Punkt ist, um Euklids Beweise nachvollziehen zu können.

Die hilbertsche Sichtweise verändert zwangsläufig den Status der unbewiesen bleibenden *Voraussetzungen* einer Theorie. Für Euklid waren sie entweder selbstevidente Wahrheiten (Axiome) oder zumindest sehr plausible Annahmen (Postulate). Wenn aber die Grundbegriffe der Theorie gar keine eindeutige Bedeutung mehr haben, dann können die Axiome (Postulate) schlecht noch irgendwie als *wahr* gelten.

Der Anspruch auf *Wahrheit der Axiome* wird gestrichen. An die Stelle der *Wahrheit der Axiome* tritt bei Hilbert ein *Quartett* an Kriterien: *Einfachheit*, *Unabhängigkeit*, *Vollständigkeit* und *Widerspruchsfreiheit*.[54] Mehr will Hilbert von Axiomen nicht verlangen. Es ist Aufgabe der mathematischen Logik diese Eigenschaften für die Axiomensysteme der verschiedenen Theorien zu prüfen.[55]

Hilbert benutzt also die Aufarbeitung des über 2000 Jahre alten Projekts der *Elemente* um gleichzeitig eine neue Betrachtungsweise von Axiomensytemen vorzuführen. Hilbert wirbt für sein Konzept dabei *nicht* mit einer programmatischen Erklärung, sondern vertraut auf die Überzeugungskraft des beeindruckenden Beispiels. Er will zeigen, wie gut sich die Probleme der Geometrie sortieren lassen, wenn man sie nur wie selbstverständlich aus der Sicht seines Kriterien *Quartetts* betrachtet. Dieses *implizite* Werben für eine neue Idee erinnert deutlich an Euklids Methode zur Propagierung der axiomatischen Strenge.

Weil er hofft, so einen mit Vehemenz geführten Streit zu den Grundlagenproblemen der Mathematik entschärfen zu können, formuliert Hilbert 18 Jahre später (1917) *explizit* eine neue Programmatik zur logischen Analyse von Axiomensystemen: den *Formalismus*. Der

---

52 *Spätere* Begriffe wie *Quadrat; Kreis, etc.* werden bei Hilbert jedoch ganz „normal“ mittels der *Grundbegriffe* definiert.

53 Die von Hilbert zur Veranschaulichung seiner Sätze und Beweisstrategien verwendeten geometrischen Skizzen nutzen diesen Hintergrund ganz selbstverständlich.

54 Die Forderungen nach Einfachheit und Vollständigkeit werden bereits in der Einleitung benannt, zum Thema Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit enthält die Festschrift ein eigenes Kapitel. Hilbert reagiert mit seinem neuen Denkstil auf ein breit wahrgenommenes Problem: *Das alte Verständnis von Axiomen als vorausgesetzten Wahrheiten trägt nicht mehr. Es wird eine neue Sicht der Dinge benötigt.*

55 Das gilt allerdings für die Forderung nach „Einfachheit“ nur eingeschränkt.

Formalismus ist eine *Präzisierung* der schon 1899 im Hintergrund stehenden Ideen. Im Programm des *Formalismus* werden an die Beweise überaus strenge Anforderungen gestellt. Um den zwischen verschiedenen Fraktionen ausgetragenen Grundlagenstreit zu schlichten, soll z.B. der Beweis der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems nur mit (den von allen Parteien akzeptierten) *finiten Methoden* geführt werden. Das Programm ist sehr ehrgeizig.

Wie *Kurt Gödel* 1931 beweist, ist das Programm *zu ehrgeizig*, um durchführbar zu sein. Wir müssen uns mit weniger begnügen.

Aber das ist eine andere Geschichte.[56]

56 Wer einen ersten Zugang zu den Arbeiten Gödels sucht, dem empfehle ich *Der Gödelsche Beweis* von Ernest Nagel und James R. Newman, erschienen in der Reihe Scientia Nova, Oldenbourg Verlag. (Engl. Original: Gödel‘s Proof) Der ca. 100 Seiten lange Text nimmt seinen Ausgangspunkt bei Euklids *Elementen*, streift die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien, schildert die Überlegungen die hinter Hilberts *Formalismus* standen, skizziert die Grundidee der *Principia Mathematica* von Russell und Whitehead und erläutert dann wie Gödel die Undurchführbarkeit des hilbertschen Programms bewies. Zwar kommt der Text nicht auf alle technischen Finessen des Gödelschen Beweises zu sprechen, er hat aber dafür den Vorteil, dass man keine 2-semestrige Logikvorlesung gehört haben muss, um dem Text folgen zu können. Kleine Ungeschicklichkeiten in der Terminologie nimmt man angesichts der Klarheit des Textes und des didaktischen Geschicks der Autoren gerne in Kauf. (Es wird z.B. von *Riemannscher Geometrie* gesprochen, wo heute *elliptische Geometrie* die eher übliche Bezeichnung ist.)
Manche der Einschätzungen zur Qualität der Axiomatik in Euklids *Elementen* kann ich nicht teilen, aber auch das sind alles nur Kleinigkeiten.

Anhang

Abbildungen

Die Abbildung auf der Titelseite (Fantasieportrait Euklids) wurde dem Wikimedia Commons Archiv entnommen und ist gemeinfrei. Das Bild stammt vom französischen Maler Charles Paul Landon (1760 – 1826).[57]

Die Abb. 23 auf Seite 28 wurde von Lutz Führer bereitgestellt und ist gemeinfrei.

Die Abbildungen 25 – 29 auf Seite 29 (Platonische Körper – 120px-Tetrahedron-slowturn.gif, 120px-Hexahedron-slowturn.gif, 120px-Dodecahedron-slowturn.gif, 120px-Octahedron-slowturn.gif, 120px-Icosahedron-slowturn.gif) stammen von *Peter Steinberg* (Bearbeitung von Vorlagen des Users *Cyp*). Sie wurden dem Wikimedia Commons Archiv entnommen und unterliegen der Lizenz Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported (siehe: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode). Den Abbildungen wurde ein Hyperlink unterlegt, der jeweils zur zugehörigen Referenz-Seite in der Wikimedia führt:

Tetraeder → http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Tetrahedron-slowturn.gif
Würfel → http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Hexahedron-slowturn.gif
Oktaeder → http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Octahedron-slowturn.gif
Dodekaeder → http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Dodecahedron-slowturn.gif
Ikosaeder → http://commons.wikimedia.org/wiki/File:120px-Icosahedron-slowturn.gif

Alle anderen Abbildungen wurden selbst erstellt und sind gemeinfrei.

Empfehlungen

Bücher

Euklid: Die Elemente

Der Beginn des axiomatischen Denkens in der Mathematik. Eine Art *Hamlet* für die Kultur des strengen Denkens und mit Sicherheit das einflussreichste Werk der Mathematik-Geschichte.

Benno Artmann: Euclid - The Creation of Mathematics

Eine brillante Analyse der Elemente Euklids. Auch wenn man vielleicht ab und zu ein Wörterbuch zur Hand nehmen muss: Sehr zu empfehlen!

Zur Literaturliste (Literaturempfehlungen) auf www.antike-griechische.de.

Links

http://www.uni-bielefeld.de/philosophie/personen/beckermann/euklid.pdf

Die Definitionen, Axiome und Postulate auf den ersten 2 Seiten der Elemente.

http://www.opera-platonis.de/euklid/

Euklids Elemente in der (schon etwas älteren) deutschen Übersetzung von Rudolf Haller.

http://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf

Vorlesungsskript zu antiker Mathematik von W.-D. Geyer, Erlangen 2001: Enthält eine Diskussion der Proportionenlehre und vermittelt einen guten Überblick über die in den *Elementen* bewiesenen Sätze.

http://www.uni-graz.at/~gronau/Gm.pdf

Vorlesungsskript von D. Gronau zur Geschichte der Mathematik (Uni Graz): Ein Überblick von den ägyptischen und babylonischen Anfängen bis hin zu Newton und Leibniz (106 S., PDF-Dokument).

http://www.uni-koeln.de/math-nat-fak/didaktiken/mathe/volkert/Vorlesungen/Geschichte_des_Parallelenaxioms

Vorlesungsskript von Klaus Volkert zum Parallelenproblem: Der lange Weg zur Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien.

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Euklids Elemente interaktiv von D. E. Joyce (engl.).

57 Die Aufklärung des Ursprungs dieses Euklid Bildnisses verdanke ich Gyula Pápay und Peter Schreiber.