Folgen und vollständige Induktion – Musterlösung

1. Addieren Sie alle natürlichen Zahlen von 1 bis 50 (und finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n)!
   Lösung:
   Ordnen der Zahlen zu Paaren, die stets 51 ergeben: $50+1, 49+2, \ldots$. *Man erhält* $25 \cdot 51 = 1275$.
   Formel für beliebiges n: $n = \frac{n(n+1)}{2}$
   Beweis durch vollständige Induktion:

$n=1$: $\frac{1(2)}{2} = 1$ ✓

$n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

2. Zeigen Sie: $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Lösung:

$n=1$: $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ ✓

$n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ✓

3. Beweisen Sie für $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

   Lösung:

$n=0$: $x^0 = 1 = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$ ✓

$n \geq 0$: $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{n+2}-1}{x-1}$ ✓

4. Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$
   Lösung:

$n=1$: $(1+x)^1 \geq 1+x$ ✓

$n \geq 1$: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, *weil* $nx^2 \geq 0 \; \forall x$. ✓

5. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) $2^n > n^2$ für große n. (Wie groß muss n mindestens sein?).
   (b) $3^n > 3n+3$ für große n. (Wie groß muss n mindestens sein?).

   Lösung:

   (a) Ausprobieren: Aussage gilt ab $n=5$.
   $n \geq 5$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ✓
   (b) Ausprobieren: Aussage gilt ab $n=3$.
   $n \geq 3$: $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3\,(3n+3) = 9n+9 > 3n+3+3 = 3\,(n+1)+3$ ✓

6. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$
   Lösung:

$n=1$: $|a_1| \leq |a_1|$ ✓

$n \geq 1$: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n+1}|$ ✓

7. Berechnen Sie die Summenwerte nachfolgender Summen für $n = 1$ bis $n = 5$, versuchen Sie eine allgemeine Lösung zu finden und beweisen Sie diese mit Hilfe von vollständiger Induktion.

   (a) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} 2^{1-k}$

   Lösung:

   (a) $n = 1 : \sum_{k=0}^{1}(2k+1) = 4;\ n = 2 : \sum_{k=0}^{2}(2k+1) = 9;\ n = 3 : \sum_{k=0}^{3}(2k+1) = 16;\ n = 4 : \sum_{k=0}^{4}(2k+1) = 25;\ n = 5 : \sum_{k=0}^{5}(2k+1) = 36$
   Allgemeine Lösung: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.
   Beweis:

   $n = 0$*:* $1 = 1\ \surd$

   $n \geq 0$*:* $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2n+3) = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2\ \surd$

   (b) $n = 1 : \sum_{k=1}^{1} 2^{1-k} = 1;\ n = 2 : \sum_{k=1}^{2} 2^{1-k} = \frac{3}{2};\ n = 3 : \sum_{k=1}^{3} 2^{1-k} = \frac{7}{4};\ n = 4 : \sum_{k=1}^{4} 2^{1-k} = \frac{15}{8};\ n = 5 : \sum_{k=1}^{5} 2^{1-k} = \frac{31}{16}$
   Allgemeine Lösung: $\sum_{k=1}^{n} 2^{1-k} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$
   Beweis:

   $n = 1$*:* $2^{1-1} = 2^0 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\ \surd$

   $n \geq 1$*:* $\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{1-k} + 2^{-n} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} + (\frac{1}{2})^n = 2 - (\frac{1}{2})^n\ \surd$

8. Unvollständige Induktion?
   Behauptung: $n^2 + 5n + 1$ ist eine gerade Zahl ($n \in \mathbb{N}$).
   Zeigen Sie zunächst: falls die Behauptung für n wahr ist, gilt sie auch für $n + 1$.
   Für welche n ist die Aussage tatsächlich wahr?
   Lösung:
   Annahme: $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 5n + 1 = 2k,\ k \in N \Rightarrow (n+1)^2 + 5(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 5n + 6 = (n^2 + 5n + 1) + (2n + 6) = 2k + 2n + 6 =: 2k',\ k' \in \mathbb{N}$. *Die Behauptung gilt jedoch nie, denn für gerades* n *ist* n^2 *und* $5n$ *gerade,* $(n^2 + 5n + 1)$ *also ungerade. Für ungerades* n *sind* n^2 *und* $5n$ *ungerade,* $(n^2 + 5n)$ *also gerade und* $(n^2 + 5n + 1)$ *wieder ungerade.*

9. Beweisen Sie $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+n+1 \\ n \end{pmatrix}$.

   Lösung:

   $n = 0$*:* $\binom{a}{0} = 1 = \binom{a+1}{0}\ \surd$

   $n \geq 0$*:* $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{a+k}{k} = \binom{a+n+1}{n} + \binom{a+n+1}{n+1} = \binom{a+(n+1)+1}{n+1}\ \surd$

10. Binomischer Lehrsatz: Für $n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert als

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   mit $n! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Zeigen Sie zunächst durch geschicktes Umformen:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

   (Tipp: Hauptnenner! Oder kennen Sie vielleicht das Pascalsche Dreieck?)
   Beweisen Sie dann mit Hilfe vollständiger Induktion den binomischen Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$$

   Lösung: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = n!(\frac{(k+1)+(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}) = n!(\frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!}) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}\ \surd$
   Beweis der Binomischen Lehrsatzes:

   $n = 0$*:* $(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1\ \surd$

$n \geq 0$: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right] \cdot (x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=-1}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^{k+1} y^{n-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} y^{n-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}$ $\surd$

11. Zeigen Sie, dass die Anzahl d(n) der Diagonalen in einem ebenen, konvexen n-Eck durch die Formel $d(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$ berechnet werden kann! Für welche n gilt die Formel?
    Tipp: Vollziehen Sie den Induktionsschritt nicht von n nach $n+1$, sondern von $n-1$ nach n.
    Lösung:
    Vorüberlegung: Wenn man von einem n-Eck auf ein (n+1)-Eck geht kommen (n-2) zusätzliche Diagonalen hinzu. Nämlich zu allen bereits existierenden Ecken, außer den beiden Nachbarecken.
    Sei $n > 3$: $d(3) = 3/2(n-3) = 0$ *stimmt, da im Dreieck keine Diagonalen existieren.*
    Sei nun $d(n-1) = \frac{n-1}{2}((n-1)-3)$ *bewiesen. Aus der Vorüberlegung folgt:*

$$d(n) = d(n-1) + (n-2) = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + \frac{2(n-2)}{2} = \frac{n^2 - 5n + 4 + 2n - 4}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n}{2}(n-3)$$

12. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $(\overline{z})^k = \overline{z^k}$. (Hinweis: Vollständige Induktion)
    Lösung:

$k = 0$: $\bar{z}^0 = 1 = \overline{z^k}$ $\surd$

$k \geq 0$: $\bar{z}^{k+1} = \bar{z}^k \bar{z} = \overline{z^k} \bar{z} = \overline{z^{k+1}}$ $\surd$

$k < 0$: $\bar{z}^k = \frac{1}{\bar{z}^{-k}} = \frac{1}{\overline{z^{-1}}} = \overline{z^k}$ $\surd$

13. Berechnen Sie jeweils die ersten Glieder der rekursiv definierten Folgen, finden Sie eine explizite Darstellung für (a_n) und für die Reihe $\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ und beweisen Sie diese!

    (a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n$
    (b) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$

    Lösung:

    (a) $2 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ $\surd$
    Behauptung: $\sum_{k=1}^{n}(a_k) = 2n$.
    Beweis:

    $n = 1$: $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ $\surd$

    $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n+1}(a_k) = \sum_{k=1}^{n}(a_k) + a_{n+1} = 2n + 2 = 2(n+1)$ $\surd$

    (b) $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{4}$; $a_3 = \frac{1}{8}$; $a_4 = \frac{1}{16}$
    Behauptung: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
    Beweis:

    $n = 1$: $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ $\surd$

    $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $\surd$

    Behauptung: $\sum_{k=1}^{n}(a_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
    Beweis:

    $n = 1$: $a_1 = 1 - (\frac{1}{2})^1 \surd$

    $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n+1}(a_k)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $\surd$

14. Es sei $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n}$. Zeigen Sie durch Induktion: $a_n \in [3;4]$
    Lösung:

$n = 1$: $a_1 = 3 \in [3,4]$ $\surd$

$n \geq 1$: $a_n \in [3,4] \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 4 - \frac{1}{4} \geq 4 - \frac{1}{a_n} \geq 4 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_{n+1} \in [3,4]$ $\surd$