6 Bestimme auf 2 Dezimalen.

a) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5+2}$ c) $2+3\cdot\sqrt{2}$ d) $2\cdot\sqrt{5}-5\cdot\sqrt{2}$

e) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}$ f) $7\cdot\sqrt{3}+\sqrt{10}$ g) $\sqrt{4\cdot 11}-\sqrt{11}$ h) $2\cdot\sqrt{63}-5\cdot\sqrt{28}$

7 Vereinfache soweit wie möglich.

a) $7\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{3}$ $11\sqrt{3}$ b) $8\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}$ $5\sqrt{2}$ c) $-2\cdot\sqrt{11}+2\cdot\sqrt{11}$ 0 d) $\sqrt{10}-7\cdot\sqrt{10}+6\cdot\sqrt{10}$ 0

e) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{8}+\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$ g) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ h) $4\cdot\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{18}$ $10\sqrt{2}$

i) $\sqrt{54}-2\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ j) $0{,}4\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{48}$ $1{,}4\sqrt{3}$ k) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt{45}-0{,}3\cdot\sqrt{20}$ $0{,}6\sqrt{5}$ l) $2\cdot\sqrt{112}+\sqrt{28}-\sqrt{252}$ $4\sqrt{7}$

8 a) $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ b) $2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}$ $\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{5}+4{,}5\cdot\sqrt{10}$ $6\sqrt{10}+2\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{64}}{3}+6\cdot\sqrt{3}-0{,}6\cdot\sqrt{175}+\sqrt{48}+\sqrt{7}$ e) $\sqrt{32}+\sqrt{8}-\sqrt{40}+\sqrt{242}-\sqrt{162}-\sqrt{80}$ $8\sqrt{2}-2\sqrt{10}-4\sqrt{5}$

9 a) $\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}$ b) $4\cdot\sqrt{y}+4\cdot\sqrt{z}-8\cdot\sqrt{z}$ c) $2\cdot\sqrt{a}+a\cdot\sqrt{2}-\sqrt{a}+a\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{a}+2a\sqrt{2}$

d) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{x}-0{,}8\cdot\sqrt{y}+\sqrt{0{,}25x}-\sqrt{\frac{y}{25}}-\sqrt{\frac{x}{16}}$ e) $15\cdot y\cdot\sqrt{x}-7y\cdot\sqrt{x}+8x\cdot\sqrt{y}+\sqrt{x^2y}$ $8y\sqrt{x}+9x\sqrt{y}$

f) $\sqrt{u^3}+\sqrt{v^3}+2{,}4\cdot u\cdot\sqrt{u}-\frac{1}{2}\cdot v\cdot\sqrt{v}-\sqrt{u^3}$ g) $s^2\sqrt{t}-0{,}6\cdot\sqrt{s^2t}+5{,}3s\cdot\sqrt{t}+0{,}7s\cdot\sqrt{s^2t}$

10 a) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$ $8+2\sqrt{15}$ b) $(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2$ $15-10\sqrt{2}$ c) $(2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2})^2$ $30+12\sqrt{6}$ d) $(8\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{8})^2$ 32

e) $(3\cdot\sqrt{5}-5\cdot\sqrt{3})\,(3\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3})$ -30 f) $(17\cdot\sqrt{2}-11\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{2})\,(\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2})$ 33

11 a) $(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2$ $u+2\sqrt{uv}+v$ b) $\sqrt{(p-q)^2}$ $|p-q|$ c) $(\sqrt{r}+\sqrt{s})\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})$ $r-s$

d) $(\sqrt{2s}-5\cdot\sqrt{t})\,(\sqrt{2s}+5\cdot\sqrt{t})$ $2s-25t$ e) $(\sqrt{u+v}-\sqrt{u-v})\,(\sqrt{u+v}+\sqrt{u-v})$ $2v$

12 Mache den Nenner rational. Gib in a) – e) einen Näherungswert an (3 Dezimalen).

a) $\frac{3\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{30}+5\sqrt{2}}{2}=6{,}274$ b) $\frac{2\cdot\sqrt{7}+\sqrt{18}}{2\cdot\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{14}+3}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{8}}$ $3\sqrt{2}-4=0{,}243$ d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=9{,}899$

e) $\frac{5\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{5}}{5\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{5}}$ $\frac{(\ )^2}{30}=0{,}127$ f) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ g) $\frac{5\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}}$ h) $\frac{\sqrt{x+z}}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}$

13 Zeige, daß für $a>0$ und $b>0$ stets $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

und für $0<b<a$ stets $\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$ gilt.

14 a) Zeige: Ist $|x|$ klein gegen 1 (z. B. $|x|\leq 0{,}1$), so gilt mit guter Näherung

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2} \qquad \sqrt{1-x}\approx 1-\frac{x}{2}.$$

(Anleitung: Quadriere beide Seiten.)

b) Berechne nach a) näherungsweise:

$\sqrt{0{,}98}$; $\sqrt{1{,}02}$; $\sqrt{1{,}06}$; $\sqrt{0{,}95}$; $\sqrt{0{,}92}$; $\sqrt{1{,}01}$; $\sqrt{0{,}99}$; $\sqrt{1{,}002}$.

15 Ein Quadrat Q_1 hat einen um 10% kleineren Flächeninhalt als ein Quadrat Q_2. Um wieviel Prozent ist die Seite von Q_1 kürzer als die von Q_2?

16 Herr Groß hat ein rechteckiges, vollständig eingezäuntes Grundstück, das 5mal so lang wie breit ist. Bei einer Baulandumlegung erhält er dafür ein gleich großes quadratisches Grundstück, das er mit dem alten Zaun einzäunen möchte.

a) Wieviel m Zaun bleiben übrig, wenn das rechteckige Grundstück 9 m breit ist? Wieviel Prozent der ursprünglichen Zaunlänge sind dies?

b) Wieviel Prozent sind es bei der Breite b des alten Grundstücks? Was fällt auf?

104 Wurzelgleichungen

1 Herr Eder möchte für ein 20 m² großes quadratisches Zimmer eine Fußleiste kaufen, die alle 4 Zimmerwände am Boden abschließt. Er findet ein 15,5 m langes Reststück.

a) Reicht die Länge, wenn er für die 90 cm breite Türe keine Leiste benötigt?

b) Welchen Flächeninhalt hat ein quadratisches Zimmer mit einer 1,10 m breiten Tür, für das 12 m Fußleiste benötigt werden?

$\sqrt{x}=6$, $\sqrt{2x-3}=5$; $\sqrt{x^2-16}=x-2$ sind Gleichungen, bei denen die Variable im Radikanden einer Wurzel vorkommt. Solche Gleichungen heißen **Wurzelgleichungen**. Will man eine solche Gleichung lösen, so muß man die Wurzel „wegschaffen". Dies erreicht man durch **Quadrieren** beider Seiten der Gleichung:

a)
$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=5\\(\sqrt{x})^2&=25\\x&=25\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1}&=-7\\2x+1&=49\\x&=24.\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten: In a) ist die Zahl 25 eine Lösung, in b) dagegen ist 24 keine Lösung der Ausgangsgleichung. Dies zeigt, daß beidseitiges **Quadrieren** einer Gleichung **keine Äquivalenzumformung** ist. Es gilt nur: Falls eine Zahl Lösung der Ausgangsgleichung ist, dann auch der „quadrierten" Gleichung; nicht umgekehrt. Deshalb ist bei Wurzelgleichungen eine **Probe** in der Ausgangsgleichung unerläßlich.

Bei Gleichungen wie

$$\sqrt{2x+1}-1=x$$

führt Quadrieren beider Seiten noch nicht zu einer wurzelfreien Gleichung, denn die linke Seite ist als Ganzes (nicht die Summanden einzeln) zu quadrieren. Wir formen deshalb zunächst so um, daß $\sqrt{2x+1}$ allein (isoliert) auf einer Seite steht:

$$\sqrt{2x+1}=x+1.$$

Nun liefert Quadrieren $2x+1=x^2+2x+1$, eine wurzelfreie Gleichung. Sie hat 0 als Lösung; die Probe zeigt, daß 0 auch Lösung der Ausgangsgleichung ist.

> Die Lösungsmenge einer **Wurzelgleichung** wird bestimmt, indem man
> a) die Wurzel isoliert,
> b) beide Seiten quadriert,
> c) die Lösungen der entstandenen wurzelfreien Gleichung bestimmt,
> d) in der ursprünglichen Wurzelgleichung die Probe macht.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-16}+x&=2\\\sqrt{x^2-16}&=2-x\\x^2-16&=4-4x+x^2\\x&=5\end{aligned}$$

Probe: Linke Seite: $\sqrt{25-16}+5=8$
Rechte Seite: 2

$L=\{\ \}$

2 a) $\sqrt{x}=6$ 36 b) $\sqrt{x}=-6$ / c) $\sqrt{x+4}=4$ 12 d) $\sqrt{x}+4=4$ 0

3 a) $\sqrt{x^2+7}=x-3$ $\{\}$ b) $\sqrt{4x^2-3}=2x-3$ $\{\}$ c) $\sqrt{2x+6}=\sqrt{2x-8}+2$ $\frac{57}{8}$