Satz: Bei positiver Grundzahl $a \in \mathbb{R}^+$ bedeutet die Potenz a^x für **jede Hochzahl** $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte **positive** reelle Zahl.
Die bisher für das Rechnen bei rationalen Hochzahlen gültigen Potenzsätze gelten allgemeiner auch bei reellen Hochzahlen.

Beispiele:

a) $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (1. Potenzsatz, gleiche Grundzahlen)

b) $6^{\sqrt{2}} : 2^{\sqrt{2}} = (6:2)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ (2. Potenzsatz, gleiche Hochzahlen)

c) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = 5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = 5^4 = 625$ (3. Potenzsatz)

2 Vereinfache: a) $10^{\sqrt{2}} \cdot 10^{-\sqrt{2}}$ b) $5^{\sqrt{8}} : 5^{\sqrt{2}}$ c) $12^{\sqrt{3}} : 6^{\sqrt{3}}$
d) $2^{\sqrt{2}} \cdot 18^{\sqrt{2}}$ e) $(3^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$ f) $(3^{\sqrt{0{,}02}})^{-\sqrt{2}}$ g) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}}$.

3 Gib (mit Hilfe des Taschenrechners) auf 3 Dezimalen genau an:
a) $2^{\sqrt{3}}$ b) $5^{\sqrt{6}}$ c) $(\frac{3}{4})^{\sqrt{2}}$ d) $0{,}28^{\sqrt[3]{7}}$ e) $7^{-\sqrt{2}}$ f) $0{,}8^{-\sqrt[3]{3}}$.

4 Vereinfache durch geeignete Umformung.
a) $3^{1+\sqrt{2}} \cdot 3^{-\sqrt{2}}$ b) $5^{-\sqrt{3}} \cdot 5^{2\sqrt{3}}$ c) $14^{\sqrt{3}} : 7^{\sqrt{3}}$ d) $100^{\sqrt{3}} \cdot 0{,}1^{\sqrt{3}}$
e) $(6^{-\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}$ f) $(3^{\sqrt{4{,}5}})^{\sqrt{2}}$ g) $(10^{\sqrt{2}} : 5^{\sqrt{2}}) \cdot 2^{\sqrt{2}}$ h) $(12^{\sqrt{2}} \cdot 12^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}}$

5 Zeige durch Umformung:
a) $(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{2}^{\sqrt{3}}) = 2^{\sqrt{3}}$ b) $(\sqrt{3})^{\sqrt{5}} : (2\sqrt{3})^{\sqrt{5}} = 2^{-\sqrt{5}}$
c) $(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})^{\sqrt{12}} = 6^{\sqrt{3}}$ d) $(\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2})^{6\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$.

6 a) Ordne die Zahlen $2^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, 2^2, $(\sqrt{2})^2$ der Größe nach ohne Verwendung von Näherungswerten.
b) Zeige mit Hilfe der Abschätzung $\sqrt{2} < 1{,}5$, daß $2^{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ ist.
c) Zeige mit Hilfe der Abschätzung $\sqrt{3} > 1{,}7$, daß $2^{\sqrt{3}} > 2\sqrt{2}$ ist.
(Anleitung: Bilde den Quotienten $2^{\sqrt{3}} : (2\sqrt{2})$).

7 Zeige: Für $x > 0$ ist
a) $(1+x)^2 > 1+2x$ b) $(1+x)^3 > 1+3x$
c) $(1+x)^4 > 1+4x$ d) $(1+x)^n > 1+nx$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$.

8 a) Gib die Zahl 3 in die Anzeige des Taschenrechners. Drücke nun wiederholt die $\sqrt{\ }$-Taste. Wie oft mußt du diese Taste betätigen, bis zum ersten Mal eine Zahl angezeigt wird, die kleiner ist als 1,001 (als 1,0001)?
b) Zeige: Zu jeder noch so kleinen Zahl $k > 0$ kann man natürliche Zahlen n finden, so daß $\sqrt[n]{3} - 1$ kleiner ist als k. (Anleitung: Verwende die Ungleichung in Aufgabe 7d.)

9 Ein Taschenrechner mit 10stelliger Anzeige liefert für $3^{1{,}41}$ (Fig. 311.2) den Dezimalbruch 4,706965. Danach scheint es sich um einen abbrechenden Dezimalbruch, also eine rationale Zahl, zu handeln.
a) Zeige, daß $3^{1{,}41}$ nicht die rationale Zahl 4,706965 ist.
b) Zeige, daß $3^{1{,}41}$ keine rationale Zahl ist.

10 Gib eine rationale (irrationale) Zahl x an, die zwischen $2^{\sqrt{2}}$ und $2^{\sqrt{3}}$ liegt.

1 Schreibe mit Komma:
a) $2\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10+4\cdot10^{-1}$ b) $7\cdot10^3+8\cdot10+3\cdot10^{-1}+10^{-2}$
c) $6\cdot10^2+10^{-2}+3\cdot10^{-4}+10^{-5}$ d) $10^{-3}+9\cdot10^{-5}+4\cdot10^{-6}$.

2 Schreibe als Summe wie in Aufgabe 1:
a) 142,36 b) 20,875 c) 3,0528 d) 0,03009.

3 Schreibe in der Form $a\cdot10^z$, so daß a nur eine Ziffer ($\neq 0$) vor dem Komma hat.
a) 340 000 b) 59 800 c) 0,00362 d) 0,000 0737
e) $25\cdot10^4$ f) $0{,}063\cdot10^{-3}$ g) $0{,}008\cdot10^6$ h) $3456\cdot10^{-5}$

4 a) $3{,}4\cdot(2\cdot10^{-4})$ b) $\frac{8\cdot12\cdot10^{-2}}{4\cdot10^2}$ c) $\frac{6{,}8\cdot10^{-2}\cdot4}{2\cdot10^2}$ d) $\frac{4{,}2\cdot10^3\cdot0{,}04\cdot10^{-2}}{0{,}8\cdot10^{-3}\cdot1{,}4}$
e) $\frac{(3\cdot10^{-2})^2\cdot1{,}21}{(11\cdot10^2)^2\cdot9}$ f) $\left(\frac{10^{-2}}{4}\right)^2\cdot5{,}6\cdot10^4$ g) $\frac{15\cdot10^{-2}}{2\cdot10^2}:(3\cdot10^{-1})$ h) $\frac{(4\cdot10^{-3}):(2\cdot10^{-1})^{-2}}{0{,}2\cdot10^{-4}}$

5 a) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x$ b) $y^{\frac{1}{2}}:y$ c) $z^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{1}{2}}$ d) $3^k:3^{\frac{1}{2}k}$ e) $x:x^{-\frac{1}{2}}$ f) $t^n:t^{\frac{1}{2}n}$
g) $10^k:2^k$ h) $8^3\cdot4^{-3}$ i) $x:x^r$ j) $a^t\cdot a^{-t}$ k) $b^{2r}\cdot b^{\frac{1}{r}}$ l) $x^c:(2x)^c$
m) $y^a\cdot y^{2a}$ n) $z^x\cdot z^{1-x}$ o) $r^t:r^{t-1}$ p) $r^a\left(\frac{1}{r}\right)^a$ q) $(4a^3):a^3$ r) $(6x)^2:(2x)^2$
s) $(8k)^{\frac{4}{3}}\cdot(8k)^{-\frac{4}{3}}$ t) $(12x)^{-3}:6x^{-2}$ u) $(0{,}4a^{-1})^2:a$

6 a) $x^{1-n}\cdot x^{n-1}$ b) $2y^{1-k}:y^k$ c) $(2z)^r:z^r$ d) $(4a^2)^n\cdot2a^{-n}$
e) $x^{\frac{1}{n}}\cdot x^{-\frac{1}{n}}$ f) $y^{-\frac{1}{n}}:y^{\frac{1}{n}}$ g) $a:a^{-n}$ h) $e^{-x}\cdot2e$

7 a) $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$ b) $\frac{(8a^3b^{-3})^{-2}}{(12a^{-2}b^{-4})^{-3}}$ c) $\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}}$ d) $\frac{(2p^{-6}q^3)^{-3}}{(2p^5q^{-2})^4}$

8 a) $\frac{(2x-4)^2}{4}$ b) $\frac{(5-10y)^3}{25}$ c) $\frac{(3-6z)^{-1}}{(1-2z)^{-3}}$ d) $\frac{(12-18x)^3}{(3x-2)^5}$
e) $(1-2x)^3(1-2x)^2$ f) $(2-5y)^3(5y-2)^3$ g) $(x-3y)^2(3y-x)^4$ h) $(2x-3y)^{-1}(3y-2x)^{-3}$
i) $\frac{(1-x^4)^{-1}}{(x^2+1)^2}$ j) $\frac{3(5-y)^{-2}}{3y-15}$ k) $\frac{2a^2}{(8a^3-2a)^2}$ l) $\frac{(4x^{2n}-1)^3}{(1-2x^n)^2}$

9 a) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})$ b) $(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{27})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$
c) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})$ d) $(x\sqrt{a}+a\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})$
e) $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$ f) $(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{b^2})(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2})$

10 a) $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ b) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})$
c) $(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$ d) $(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})$

11 a) $(\sqrt{ax}-\sqrt{bx}):\sqrt{x}$ b) $(a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}):\sqrt[3]{ab}$
c) $(x-y):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ d) $(a\sqrt{ax}-x\sqrt{ax}):(\sqrt{a}-\sqrt{x})$

12 a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ b) $\frac{x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}$

13 a) $(a^{\frac{2}{3}})^3$ b) $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ d) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

14 Forme so um, daß im Nenner keine Wurzel steht.
a) $\frac{4x^2}{\sqrt[3]{2x}}$ b) $\frac{6a}{\sqrt[4]{2a^3}}$ c) $\frac{18b}{\sqrt[3]{9b}}$ d) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$